

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、 选择题：本小题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z=1+i$ ，则 $|z^2-2z|$ =
- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】D

【解析】 $z^2-2z=z(z-2)=(i+1)(i-1)=i^2-1=-2$ ，故 $|z^2-2z|=2$

2. 设集合 $A=\{x|x^2-4\leq 0\}$ ， $B=\{x|2x+a\leq 0\}$ ，且 $A\cap B=\{x|-2\leq x\leq 1\}$ ，则 a =
- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】 $A=\{x|-2\leq x\leq 2\}$ ， $B=\{x|x\leq -\frac{a}{2}\}$ ， $\therefore -\frac{a}{2}=1, a=-2$

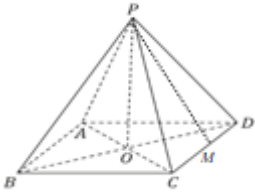
3. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥的一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为



- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】如图 $PO\perp ABCD$ ，取 CD 的中点为 M



易得 $PO^2 = PM^2 - \frac{1}{4}CD^2$, $\therefore PO^2 = \frac{1}{2} \times PM \times CD$

$$4PM^2 - 2PM \cdot CD - CD^2 = 0$$

高与边长之比 $\frac{PM}{CD} = t$, 则 $4t^2 - 2t - 1 = 0$, 解得 $t = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

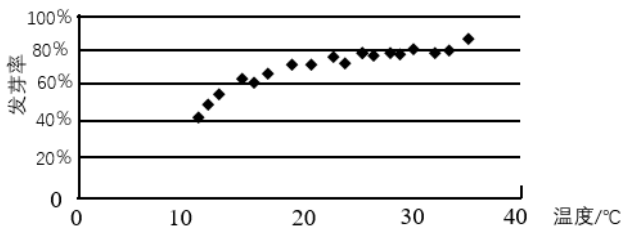
4. 已知 A 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 12, 到 y 轴的距离为 9, 则 $p =$

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

【答案】C

【解析】 $y^2 = 2px (p > 0)$, $x_A = 9$, $AF = x_A + \frac{p}{2} = 12$, $\frac{p}{2} = 3$, $p = 6$.

5. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的关系, 在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图:



由此散点图, 在 10°C 至 40°C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是

- A. $y = a + bx$ B. $y = a + bx^2$ C. $y = a + be^x$ D. $y = a + b \ln x$

【答案】D

【解析】由散点图分布可知, 图像增长趋势更接近对数函数图像, 故选 D

6. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

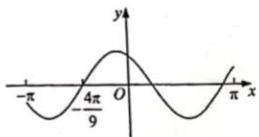
- A. $y = -2x - 1$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = 2x - 3$ D. $y = 2x + 1$

【答案】B

【解析】 $Q f(1) = 1 - 2 = -1$, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$\therefore k = f'(1) = 4 - 6 = -2$, 切线方程为 $y + 1 = -2(x - 1)$, 即 $y = -2x + 1$

7. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为



- A. $\frac{10\pi}{9}$ B. $\frac{7\pi}{6}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】 $Q f\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \therefore -\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \omega = -\frac{3}{4}(1+3k)$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{-8\pi}{3+9k}, \therefore k = -1, T = \frac{4\pi}{3}$$

8. $(x + \frac{y^2}{x})(x + y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

【答案】C

【解析】 $\left(x + \frac{y^2}{x}\right)(x + y)^5 = x(x + y)^5 + \frac{y^2}{x}(x + y)^5$, 其中展开式中有 x^3y^3 的项有

$$xC_5^3x^2y^3 + \frac{y^2}{x}C_5^1x^4y^1 = C_5^3x^3y^3 + C_5^1x^3y^3, \text{ 所以 } x^3y^3 \text{ 的系数为 } C_5^3 + C_5^1 = 15$$

9. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$, 则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】由二倍角公式可得 $3(2\cos^2\alpha - 1) - 8\cos\alpha = 5$, 化简为 $6\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 8 = 0$, 即 $3\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 4 = 0$,

又因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, 所以 $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

故选 A

10. 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $e O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 若 $e O_1$ 的面积为 4π , $AB = BC = AC = OO_1$, 则球 O 的表面积为

- A. 64π B. 48π C. 36π D. 32π

【答案】A

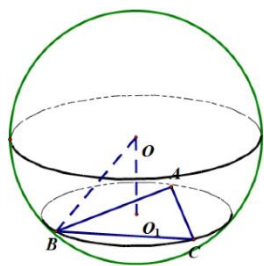
【解析】设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r_1 , 由 $\pi r_1^2 = 4\pi$, 得 $r_1 = 2$;

$\triangle ABC$ 中由正弦定理 $2r_1 = \frac{AB}{\sin 60^\circ}$, $\therefore AB = 2\sqrt{3}$, $\therefore BO_1 = 2$, $OO_1 = 2\sqrt{3}$

$$\therefore OB = R = \sqrt{12 + 4} = 4,$$

$\therefore S=4\pi R^2=64\pi$

故选 A.



新东方 中小学全科教育 XDF.CN

11. 已知 $e M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点. 过点 P 作 $e M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为

- A. $2x - y - 1 = 0$
- B. $2x + y - 1 = 0$
- C. $2x - y + 1 = 0$
- D. $2x + y + 1 = 0$

新东方 中小学全科教育 XDF.CN

【答案】D

【解析】 $e M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 解得 $r=2$, $S_{\text{四}PAMB} = r \cdot PA = \frac{1}{2} PM \cdot AB$,

化简得 $4\sqrt{PM^2 - 4} = PM \cdot AB$, $\therefore AB = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{PM^2}}$

$\therefore |PM| \cdot |AB| = 4 \cdot \sqrt{PM^2 - 4}$

当 $PM \perp l$ 时最小, 排除 A、C

此时 $AB \perp l$, \therefore 设直线 AB 的方程为 $l_1: 2x + y + C = 0$

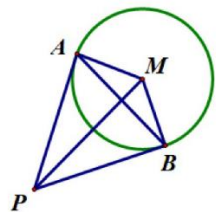
在 $\triangle PAM$ 中可解得平行直线之间的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

由平行直线距离公式得 $d = \frac{|2-C|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 解得 $C=1$ 或 $C=3$,

又 \because 直线 AB 与 $e M$ 有两个交点, 则圆心距 $d = \frac{|5+C|}{\sqrt{5}} < 2$, $\therefore C=1$

直线 AB 的方程为 $2x + y + 1 = 0$

故选 D



新东方 中小学全科教育 XDF.CN

12. 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

【答案】B

【解析】令 $f(x) = 2^x + \log_2^x$ ，由 $f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 2}$ ($x > 0$) 得 $f'(x) > 0$ 在 $(0, \infty)$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 单调递增。

$$\text{又 } 2^a + \log_2^a = 4^b + 2 \log_2^b = 2^{2b} + \log_2^{2b} - 1,$$

$$\text{且 } f(a) = 2^a + \log_2^a, \quad f(2b) = 2^{2b} + \log_2^{2b},$$

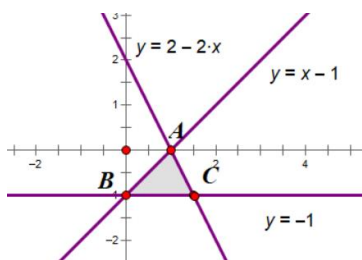
所以 $f(a) = f(2b) - 1$ 即 $f(a) - f(2b) = -1 < 0$ ，所以 $a < 2b$ ，故选 B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0, \\ x - y - 1 \geq 0, \\ y + 1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 7y$ 的最大值为 _____

【答案】1

【解析】由 $z = x + 7y$ 得到 $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$ ，平移 $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$ 可以得知 $y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}z$ 经过 $A(1, 0)$ 得到 $z = x + 7y$ 的最大值为 1。



14. 设 a, b 为单位向量，且 $|a + b| = 1$ ，则 $|a - b| =$ _____

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】因为 $|a + b| = 1$ ，所以 $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，所以 $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ，所以

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \quad \text{所以 } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

15. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点， A 为 C 的右顶点， B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴。

若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为 _____

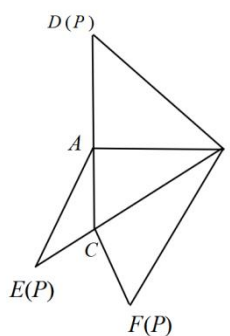
【答案】2

【解析】因为 $\tan \angle BAF = \frac{BF}{AF} = \frac{b^2}{c - a} = 3$ ，所以 $b^2 = 3a(c - a)$ ，所以 $c^2 - a^2 = 3a(c - a)$ ，所以 $2a^2 - 3ac + c^2 = 0$ ，所

以 $(2a - c)(a - c) = 0$ ，所以 $c = 2a$ 或者 $c = a$ (舍去)

所以 C 的离心率为 $e=2$ 。

16、如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中， $AC=1$ ， $AB=AD=\sqrt{3}$ ， $AB \perp AC$ ， $AB \perp AD$ ， $\angle CAE=30^\circ$ ，则 $\cos \angle FCB =$ _____

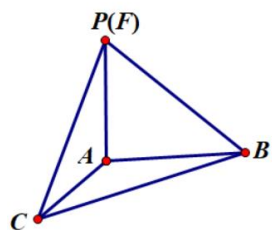


【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】还原三棱锥 $P-ABC$ 之后得到下图。

在 $\triangle PCA$ 中， $PC^2 = 1 + 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ ，所以 $PC=1$ ，在 $\triangle PBA$ 中， $PB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$ ，在 $\triangle DCBA$ 中， $BC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

在 $\triangle DCB$ 中， $\cos \angle FCB = \frac{1+4-6}{2 \cdot 1 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17、(12 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列， a_1 为 a_2 ， a_3 的等差中项。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比；

(2) 若 $a_1=1$ ，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和。

【答案】(1) $q=-2$ ；(2) $S_n = \frac{1}{9} - \frac{(-2)^n(1+3n)}{9}$

【解析】

(1) $\because 2a_1 = a_2 + a_3 \therefore q^2 + q - 2 = 0$ ，所以 $q = -2, q = 1$ (舍去)

(2) $Q a_1=1, \therefore a_n = (-2)^{n-1}, \therefore na_n = n \cdot (-2)^{n-1}$

设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

$$S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} + na_n, \text{ 得}$$

$$S_n = 1 + 2 \cdot (-2)^1 + 3 \cdot (-2)^2 + \dots + (n-1)(-2)^{n-2} + n \cdot (-2)^{n-1}, \text{ 两边乘公比 } -2, \text{ 得}$$

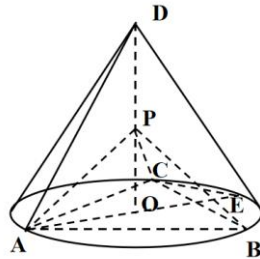
$$-2S_n = (-2) + 2 \cdot (-2)^2 + \dots + (n-1)(-2)^{n-1} + n \cdot (-2)^n$$

$$\therefore 3S_n = 1 + (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{n-1} - n \cdot (-2)^n = 1 + \frac{-2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} - n \cdot (-2)^n$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{9} - \frac{(-2)^n(1+3n)}{9}$$

18、(12分)

如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, AE 为底面直径, $AE = AD$. $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $PO = \frac{\sqrt{6}}{6} DO$.



- (1) 证明: $PA \perp$ 平面 PBC ;
 (2) 求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.

【答案】(1) 略; (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

(1) 连接 OB , 设 $AE = 2r$, 则 $AD = 2r$, $OA = OB = r$, $OD = \sqrt{3}r$

$$\therefore PO = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad PB = PA = \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + r^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}r$$

$$AB = \sqrt{3}r, \text{ 则 } PA^2 + PB^2 = AB^2, \therefore PA \perp PB$$

同理, $PA \perp PC$

又 $PB \subset$ 平面 PBC , $PC \subset$ 平面 PBC , $PB \cap PC = P$, $PA \perp$ 平面 PBC

(2) 取 AB 靠近 B 点的三等分点 M ,

以 O 点为原点, OA, OM, OD 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴

$$B\left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right), \quad P\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}r\right), \quad C\left(-\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right), \quad E(-r, 0, 0)$$

设平面 BPC 和平面 PCE 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{BP} = \left(\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r \right), \vec{EP} = \left(r, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}r \right), \vec{BC} = (0, -\sqrt{3}r, 0), \vec{EC} = \left(\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, 0 \right)$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0 \\ -\sqrt{3}y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } \vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 0, -1), \vec{n}_2 = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2} \right)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{2} + \sqrt{2}|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

19、(12分)

甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束。

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空。设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$ 。

- (1) 求甲连胜四场的概率；
- (2) 求需要进行第五场比赛的概率；
- (3) 求丙最终获胜的概率。

【答案】(1) $\frac{1}{16}$ ；(2) $\frac{3}{4}$ ；(3) $\frac{7}{16}$

【解析】

(1) 甲连胜四场

第一场：甲胜，乙输

第二场：甲胜，丙输

第三场：甲胜，乙输

第四场：乙淘汰，甲、丙比赛，甲胜，比赛结束

$$\text{故 } P = \left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

(2) 若需要进行5场比赛，说明第4场无法结束比赛，则可以先算出4场可结束的比赛的概率，借助正难则反的思想即可

4场结束比赛的情况分类如下：

$$\text{第一类：甲连胜四场 } \left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

第二类：乙连胜四场 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

第三类：丙胜， $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$

故需要进行 5 场比赛的概率为 $P = 1 - \frac{1}{8} \times 2 = \frac{3}{4}$

(3) 丙最终获胜，需要进行的比赛场数为 4 场或者 5 场

若是 4 轮结束：概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$

若是 5 场结束，丙可能在第 2 场、第 3 场和第 4 场输

①若丙在第 2 场输，则 $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

②若丙在第 3 场输，则 $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

③若丙在第 4 场输，则 $P_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{32}$

故丙最终获胜的概率 $P = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \times 2 = \frac{1}{8} + \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$

20、(12 分)

已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右顶点， G 为 E 的上顶点， $\vec{AG} \cdot \vec{GB} = 8$. P 为直线 $x = 6$ 上

的动点， PA 与 E 的另一交点为 C ， PB 与 E 的另一交点为 D .

(1) 求 E 的方程；

(2) 证明：直线 CD 过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ；(2) 见解析

【解析】

(1) 已知 $A(-a, 0)$ ， $B(a, 0)$ ， $G(0, 1)$ ，

则 $\vec{AG} \cdot \vec{GB} = (a, 1) \cdot (a, -1) = a^2 - 1 = 8$ ，解得 $a = 3$ ， $a = -3$ (舍去)

则椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(2) 由 (1) 得 $A(-3, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，设 P 点坐标为 $(6, n)$ ，易得直线 PA, PD 都有斜率

易得直线 AP 的方程为 $y = \frac{n}{9}(x+3)$

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{n}{9}(x+3) \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \text{整理得} (9+n^2)x^2 + 6n^2x + (9n^2 - 81) = 0$$

$$\text{由韦达定理: } x_A \cdot x_C = \frac{9n^2 - 81}{9+n^2} = -3 \cdot x_C, \text{ 解得 } x_C = \frac{27-3n^2}{9+n^2}, \text{ 则 } y_C = \frac{6n}{9+n^2}$$

$$\text{即 } C\left(\frac{27-3n^2}{9+n^2}, \frac{6n}{9+n^2}\right)$$

$$\text{同理可得: } D\left(\frac{3n^2-3}{1+n^2}, \frac{-2n}{1+n^2}\right)$$

$$\text{易得直线 } CD \text{ 的斜率为 } K_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-4n}{3(n^2-3)}, \text{ 则直线 } CD \text{ 的方程为 } y + \frac{2n}{1+n^2} = \frac{-4n}{3(n^2-3)}\left(x - \frac{3n^2-3}{1+n^2}\right)$$

$$\text{显然 } y=0, \text{ 易得 } x = \frac{3}{2}, \text{ 即直线 } CD \text{ 恒过定点 } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

21、(12分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 (2) $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$

【解析】

(1) 解: $a=1$ 时, $f(x) = e^x + x^2 - x$, $f'(x) = e^x + 2x - 1$, $f''(x) = e^x + 2 > 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增且 $f'(0) = 0$

$$x < 0, f'(x) < 0, x > 0, f'(x) > 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 即 $e^x + ax^2 - x \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$

① 当 $x=0$ 时, $1 \geq 1$ 成立

② 当 $x > 0$ 时, 不等式可化为 $a \geq \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2} (x > 0)$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2}, \quad g'(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 2e^x + 2)}{2x^3}$$

$$\text{令 } h(x) = x^2 + 2x - 2e^x + 2 (x > 0), \quad h'(x) = 2x + 2 - 2e^x = -2(e^x - x - 1)$$

设 $u(x) = e^x - x - 1 (x > 0)$, $u'(x) = e^x - 1 > 0$, 故 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore u(x) > u(0) = 0, \text{ 即 } h'(x) < 0$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减, } \therefore h(x) < h(0) = 0$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 2,$$

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增;

当 $x > 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递减

$$\therefore g(x)_{\max} = g(2) = \frac{7 - e^2}{4}, \text{ 则 } a \geq \frac{7 - e^2}{4}$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{7 - e^2}{4}, +\infty \right)$$

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^k t \\ y = \sin^k t \end{cases}$ (t 为参数)。以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立

极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta - 16\rho\sin\theta + 3 = 0$

(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标。

【答案】(1) C_1 是以 $(0,0)$ 为圆心, 以 1 为半径的圆; (2) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 。

【解析】

(1) 当 $k=1$ 时, C_1 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 此时 C_1 是以 $(0,0)$ 为圆心, 以 1 为半径的圆。

(2) 当 $k=4$ 时, C_1 的普通方程为 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, C_2 的直角坐标方程为 $4x - 16y + 3 = 0$, 两式联立得 $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

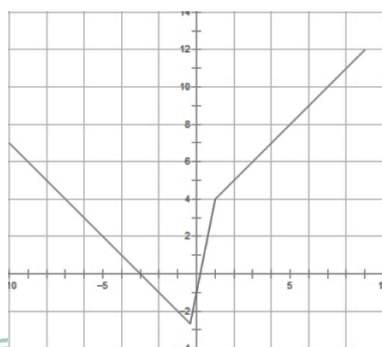
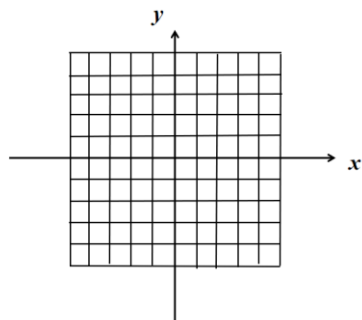
故 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$ 。

(1) 画出 $y = f(x)$ 的图像;

(2) 求不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集.



【答案】(1)

; (2) $\left\{x \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$.

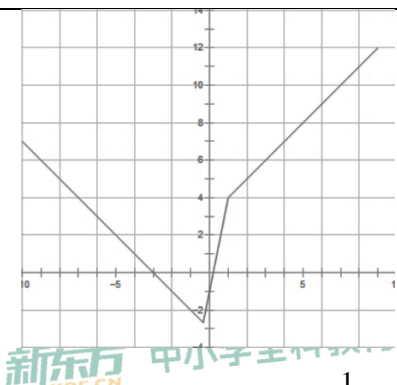
【解析】

(1) 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x + 3$

当 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $f(x) = 5x - 1$

当 $x \leq -\frac{1}{3}$ 时, $f(x) = -x - 3$

所以 $y = f(x)$ 的图像如图所示,



(2) 由图像平移可知, 当 $x \leq -\frac{1}{3}$ 时, $|3x+1|-2|x-1| > |3(x+1)+1|-2|(x+1)-1|$

化简得 $|3x+4| < -3x-3$, 则 $3x+3 < 3x+4 < -3x-3$, $\therefore x < -\frac{7}{6}$

解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$.