2020 普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

★新东方武汉优能高中数学★

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1．若 $z=1+i$ ，则 $|z^2-2z|=$ （　　）

A. 0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】D

【解析】$|z^2-2z|=|(1+i)^2-2(1+i)|=|1+2i+i^2-2-2i|=|-2|=2$

2．设集合 $A=\{x|x^2-4\le 0\}$，$B=\{x|2x+a\le 0\}$，且 $A\cap B=\{x|-2\le x\le 1\}$，则 $a=$ （　　）

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

【答案】B

【解析】

$A=\{x|-2\le x\le 2\},B=\{x|x\le -\frac{a}{2}\},\because A\cap B=\{x|-2\le x\le -\frac{a}{2}\}=\{x|-2\le x\le 1\}$

$\therefore -\frac{a}{2}=1,a=-2$

3．埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形的底边上的高与底面正方形的变长的比值为

A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

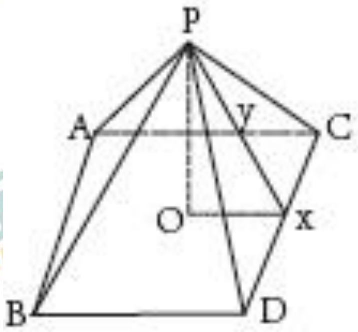
B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】设底面正方形长为 x ，侧面三角形底边上的高为 y



$$PO=\sqrt{y^2-(\frac{1}{2}x)^2},S_{\text{正方形}}=|PO|^2=y^2-\frac{1}{4}x^2$$

$$S_{\text{侧}}=\frac{1}{2}xy\ ,S_{\text{正方形}}=S_{\text{侧}}$$

$$y^2-\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}xy\ ,4y^2-2xy-x^2=0$$

$$4\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}-1=0\ ,\text{令t}=\frac{y}{x}$$

$$4t^2-2t-1=0\ ,t=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2+16}}{2\times 4}=\frac{2\pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$\because t>0\ ,\therefore \text{t}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

4. 已知 A 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上的一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p=$ （　　）.

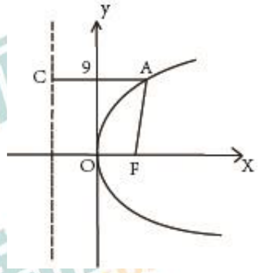
A．2　　B．3　　C．6　　D．9

【答案】C

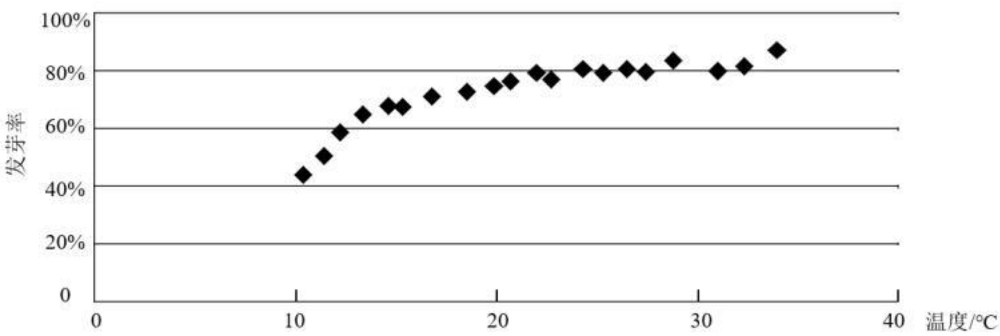
【解析】由抛物线的定义得：$|AC|=|AF|=12$

$\because |AB|=9$，$\therefore |CB|=3$

$\therefore \frac{p}{2}=3$，$p=6$



5．某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x（单位：℃）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在10℃至40℃之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是

A． $y=a+bx$　　B． $y=a+bx^2$　　C． $y=a+be^x$

D． $y=a+b\ln x$

【答案】D

【解析】在散点图中，样本点并没有分布在某个带状区域中，因此两个变量不呈线性相关关系，不能直接利用线性回归模型来刻画两个变量之间的关系。根据已有的函数知识，可以发现样本点分布在某一条对数曲线 $y=a+b\ln x$ 周围。

6．函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程为(　　).

A. $y=-2x-1$　　B. $y=-2x+1$　　C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+1$

【答案】B

【解析】$f'(x)=4x^3-6x^2$, $f'(-1)=-2$

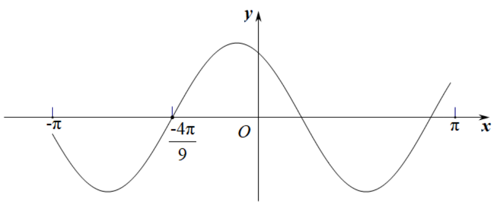
$f(1)=1-2=-1$, $f(x)-(-1)=-2(x-1)$

$f(x)=-2x+1$

7. 设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为

A. $\frac{10\pi}{9}$　　B. $\frac{7\pi}{6}$　　C. $\frac{4\pi}{3}$

D. $\frac{3\pi}{2}$



【答案】C

【解析】$\begin{cases} -\frac{4\pi}{9}w+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi+2k\pi \\ \frac{2\pi}{w}<\pi-(-\frac{4}{9}\pi) \\ \frac{T}{w}>-\frac{4\pi}{9}-(-\pi) \end{cases}$, $\begin{cases} w=-3-\frac{9k}{2}=-\frac{6+9k}{2} \\ w>\frac{18}{13} \\ w<\frac{9}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} T=\dfrac{2\pi}{|w|}=\dfrac{4\pi}{|6+9k|} \\ \dfrac{10\pi}{9}<T<\dfrac{26}{18}\pi \end{cases}$$

$k=-1$ 时，符合

$\therefore T=\dfrac{4\pi}{3}$

8．$\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为（　　）．

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

【答案】C

【解析】$\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 中 x^3y^3 的系数 $=C_5^3+C_5^1=10+5=15$

9．已知 $a\in(0,\pi)$，且 $3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$ 则 $\sin\alpha=$（　　）．

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

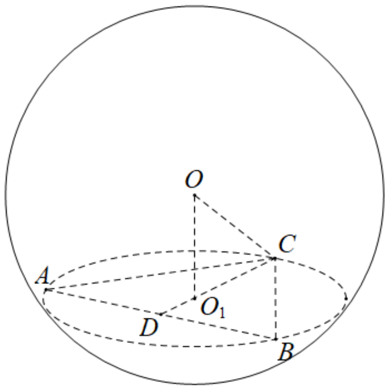
【答案】A

【解析】$3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，$3\left(\cos^2\alpha-1\right)-8\cos\alpha=5$，$3\cos^2-4\cos\alpha-4=0$，

$(3\cos\alpha+2)(\cos\alpha-2)=0$

$\therefore \cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$ 或 $\cos\alpha=2$（舍）

$\because \alpha\in(0,\pi)$　$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



10．已知 A,B,C 为球 O 的球面上的三个点，⊙O_1 为 ΔABC 的外接圆。若⊙O_1 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为（　　）．

A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π

【答案】A

【解析】$\because$□O_1面积为4π，$\therefore \pi r_1=4\pi$，$\therefore r_1=2$，

$\because AB=BC=AC$，$\therefore \Delta ABC$为等边三角形

$\therefore \dfrac{AB}{\sin C}=2r_1 \Rightarrow AB=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

取AB中点D，$CD=BC\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，$\therefore CO_1=\dfrac{2}{3}CD=2$

$\because OO_1=AB=2\sqrt{3}$　$\therefore R=CO=\sqrt{OO_1^2+CO_1^2}=\sqrt{12+4}=4$

$\therefore$球O的面积$S=4\pi r^2=4\cdot\pi\cdot 4^2=64\pi$

11.已知□$M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线$l:2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作□M的切线PA，PB，切点为A,B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为________

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

【答案】D

【解析】$\because S_{四边形PAMB}=\dfrac{1}{2}|PA|\cdot|AM|=\sqrt{|PM|^2-|AM|^2}\cdot|AM|$，

$\therefore |PM|\cdot|AB|$最小时，即$|PM|$取最小值时，

即$PM\perp l$，得$M(1,1)$，故$PM:x-2y+1=0$，得：$P(-1,0)$

则以PM为直径的圆的方程为：$x^2+y^2-y-1=0$

所以AB的方程为$2x+y+1=0$．

12.若$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则________

A. $a>2b$　　　　*B.* $a<2b$　　　　*C.* $a>b^2$

D. $a<b^2$

【答案】*B*

【解析】1° $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$，设 $f(x)=2^x+\log_2 x$，得：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$

上单调递增，$\therefore 2^{2b}+\log_2 b>2^{2b}+\log_2 b=2^a+\log_2 a$，

$\therefore a<2b$，$\therefore A$ 错 B 对

2° 设 $a=tb^2\ (t>0,a,b>0)$ 则 $2^a+\log_2 a=2^{tb}+\log_2 tb^2$

$=4^{\frac{t}{2}b^2}+2\log_4 tb^2=4^b+2\log_4 b$，$\therefore 4^b-4^{\frac{t}{2}b^2}=2\log_4 tb$

取 $t=1$，则 $4^b-4^{\frac{1}{2}b}=2\log_4 b$

$f(b)=4^b-4^{\frac{1}{2}b}-2\log_4 b$，$f(b)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续

$f(2)=-2\log_4 2<0$，$f(1)=4^1-4^{\frac{1}{2}}=2>0$，$f(2)\cdot f(1)<0$

$\therefore \exists b\in(1,2)$，使得 $f(b)=0$

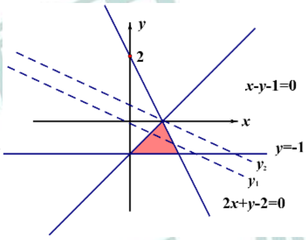
$\therefore \exists b\in(1,2)\ a=b^2$，使得原等式成立，$\therefore C$，$D$ 错误

$\therefore$ 选 (B)

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-x\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值______.

【答案】1

【解析】由题可知：不等式组 $\begin{cases}2x+y-x\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$ 对

图阴影部分

如下图

由 $z=x+7y$ 得 $y=-\frac{1}{7}x+\frac{z}{7}$

由图可知当直线经过点 $(1,0)$ 时

直线 $y=-\frac{1}{7}x+\frac{z}{7}$ 的截距最大，此时 z 最大

$\therefore z_{\max}=1$

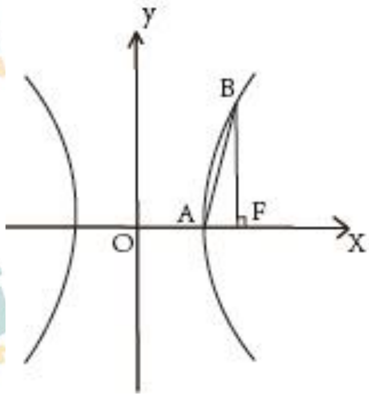
14.设 a,b 为单位向量，且 $|a+b|=1$，则 $|a-b|=$______.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\because |a+b|=1$，$\therefore (a+b)^2=1\Rightarrow |a|^2+|b|^2+2ab=1\Rightarrow ab=-\frac{1}{9}$

$\therefore |a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{|a|^2+|b|^2-2ab}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

15.已知 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点, A 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴，若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为______.



【答案】2

【解析】 得: $B(c,\frac{b^2}{a})$　　$\therefore k_{AB}=\frac{b^2/a}{c-a}=3$

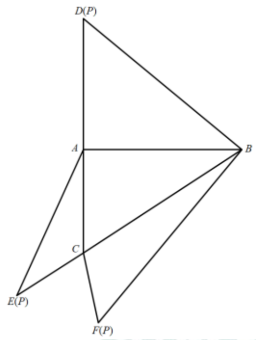
$b^2=3ac-3a^2=c^2-a^2$

$c^2-3ac+2a^2=0$

$c=2a$　或 a（舍去 $c>a$）

$\therefore e=\frac{c}{a}=2$

16.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AB\perp AC,\ AB\perp AD,\ \angle CAE=30^\circ,$ $AC=1,\ AB=AD=\sqrt{3},$ 则 $\cos\angle FCB=$________



【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】由展开图的性质得 $AE=AD=\sqrt{3}$，$CE=CF$，$BF=BD$，在$\triangle ACE$中，由余弦定理得 $CE^2=AE^2+AC^2-2AE\cdot AC\cos\angle CAE=3+1-2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，故 $CE=1$．因为 $AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AD$，故 $BD=\sqrt{6}$，因为 $AB\perp AC$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，故 $BC=2$．则 $\triangle BCF$ 中，$CF=1$，$BC=2$，$BD=\sqrt{6}$，故 $\cos\angle FCB=\frac{BC^2+CF^2-BF^2}{BC\cdot CF}=-\frac{1}{4}$．

三．解答题：共 70 分，解答应写出文字说明证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列，a_1 为 a_2，a_3 的等差中项．

（1）求 $\{a_n\}$ 的公比；

（2）若 $a_1=1$，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和．

【答案】（1）$\{a_n\}$ 公比为 2；（2）$T_n=\frac{1}{9}-(\frac{1}{9}+\frac{n}{3})\cdot(-2)^n$．

【解析】

（1）设$\{a_n\}$的公比为q．

由题意：$a_2+a_3=2a_1$

即：$a_1q+a_1q^2=2a_1$

$\because a_1\neq 0$

$\therefore q^2-q-2=0$

$\therefore q=-2$或$q=1$（舍）

$\therefore \{a_n\}$公比为2.

（2）由（1）知$a_n=a_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$

$\therefore na_n=n\cdot(-2)^{n-1}$

设数列$\{na_n\}$的前n项和为T_n

则$T_n=1\cdot(-2)^0+2\cdot(-2)^1+3\cdot(-2)^2+\ldots\ldots+(n-1)\cdot(-2)^{n-2}+n\cdot(-2)^{n-1}$　①

$\therefore -2T_n=1\cdot(-2)^1+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\ldots\ldots+(n-1)\cdot(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$　②

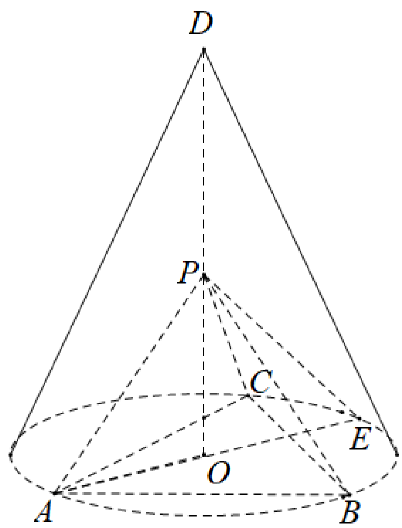
①-②得：$3T_n=1\cdot(-2)^0+\left[(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\ldots\ldots+(-2)^{n-1}\right]-n\cdot(-2)^n$

$$=1+\frac{(-2)-(-2)\cdot(-2)^{n-1}}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^n$$

$$=\frac{1}{3}-(\frac{1}{3}+n)\cdot(-2)^n$$

$\therefore T_n=\frac{1}{9}-(\frac{1}{9}+\frac{n}{3})\cdot(-2)^n$

18. 如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，AE 为底面直径，$AE=AD$，ΔABC 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO$.



（1）证明 $PA\perp$ 平面 PBC；

（2）求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.

【答案】（1）如下；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】（1）证明：设 BC、OE 交于 M，连接 PM，M 为 BC 中点

$\because D$ 为圆锥顶点，O 是圆锥底面的圆心

$\therefore DO\perp$ 平面 ABC

又 $\because BC\subset$ 平面 ABC

$\therefore DO\perp BC$

$\because P$ 为 DO 上一点

$\therefore PC=PB$

又 $\because M$ 为 BC 中点

$\therefore PM\perp BC$

$\because PM\subset$ 平面 PAE

$\therefore BC\perp PA$

设 $DO=6$，则 $PO=\sqrt{6}$

由 $AD=AE=DE$ 知：ΔADE 是正三角形

$\because \cos\angle ODA=\cos 30^{\circ}=\frac{DO}{AD}$

$\therefore AD=\dfrac{DO}{\cos 30^{\circ}}=4\sqrt{3}$

在正三角形ΔABC中，$OA=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{1}{2}AD=2\sqrt{3}$，$OM=\dfrac{1}{2}OA=\sqrt{3}$，$AM=OA+OM=3\sqrt{3}$

在$Rt\Delta POA$中，$PA=\sqrt{PO^2+OA^2}=3\sqrt{2}$

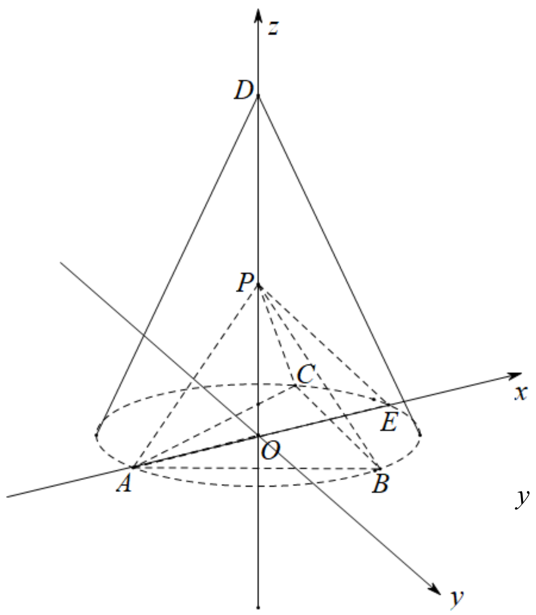
在$Rt\Delta POM$中，$PM=\sqrt{PO^2+OM^2}=3$

$\therefore PA^2+PM^2=(3\sqrt{2})^2+3^2=27=(3\sqrt{3})^2=AM^2$

$\therefore \Delta APM$是直角三角形且$\angle APM=90^{\circ}$，即$PA\perp PM$

又$\because PM\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，$PM\cap BC=M$

$\therefore PA\perp$平面PBC



（2）以 0 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系，其中y轴平行于BC，则$O(0,0,0)$

由（1）知$AB=6$，　$B(3,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{6})$，$C(-3,\sqrt{3},0)$，$A(0,-2\sqrt{3},0)$ $E(0,2\sqrt{3},0)$

则，$\overline{CE}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overline{PE}=(0,2\sqrt{3},-\sqrt{6})$

由题知平面PBC的法向量即为$\overline{AP}=(0,2\sqrt{3},\sqrt{6})$

平面PCE的法向量设为$\vec{n}=(a,b,c)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{CE}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{PE}=0\end{cases}$得$\begin{cases}3a+\sqrt{3}b=0\\ 2\sqrt{3}b-\sqrt{6}c=0\end{cases}$

取$\vec{n}=(-1,\sqrt{3},\sqrt{6})$

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore$二面角$B-PC-E$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

19．甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束．

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空．设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$．

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率．

【答案】（1）$\frac{1}{16}$（2）$\frac{3}{4}$（3）$\frac{7}{16}$

【解析】

（1）记“甲连胜四场”为事件M，A_k为甲在第k局中获胜．

$\therefore P(M)=P(A_1A_2A_3A_4)=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

（2）记“需要进行第五场比赛”为事件N，事件A为甲输，事件B为乙输，事件C为丙输．

$\therefore$四局内结束比赛的概率为

$$P=P(ABAB)+P(ACAC)+P(BABA)+P(BCBC)=4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(N)=1-P=\frac{3}{4}$$

（3）记“丙最终获胜”为事件D．

$$\therefore P(D)=P(ABAB)+P(ABACB)+P(ABCAB)+P(ABCBA)+P(ACABB)+P(ACBAB)$$

$$=\frac{1}{16}\times 2+10\times(\frac{1}{2})^5=\frac{7}{16}$$

20．已知 A,B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$．$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D．

（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点．

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$；（2）如下．

【解析】解：（1）由题意得：

$G(0,1)\quad A(a,0)\quad B(a,0)$，

则 $\overrightarrow{AG}=(a,1)$，

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，所以 $a^2=9$

则 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$．

（2）由题意得：$A(-3,0)\quad B(3,0)\quad P(6,t)$，则 $k_{PA}=\dfrac{t}{9}$，则直线 AP 方程为：$y=\dfrac{t}{9}(x+3)$

则联立方程组得 $\begin{cases} y=\dfrac{t}{9}(x+3) \\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases}$

化简得 $\left(9+t^2\right)x^2+6t^2x+9t^2-81=0$．

所以 $x_C=\dfrac{27-3t^2}{9+t^2}, y_C=\dfrac{6t}{9+t^2}$　即 C 点坐标为 $\left(\dfrac{27-3t^2}{9+t^2},\dfrac{6t}{9+t^2}\right)$；

同理可得：$\begin{cases} y=\dfrac{t}{3}(x-3) \\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases}$

化简得$\left(1+t^2\right)x^2-6t^2x+9t^2-9=0$；

所以$x_D=\dfrac{3t^2-3}{t^2+1},y_D=-\dfrac{2t}{t^2+1}$,即 D 点坐标为$\left(\dfrac{3t^2-3}{t^2+1},-\dfrac{2t}{t^2+1}\right)$

当$x_C\neq x_D$时，$k_{CD}=\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{4t}{3(3-t^2)}$， $l_{CD}:y=\dfrac{4t}{3(3-t^2)}(x-\dfrac{3t^2-1}{t^2+1})-\dfrac{2t}{t^2+1}$

化简可得：$(4t^3+4t)x-3(3-t^2)(t^2+1)y-6t(t^2+1)=0$

$4tx-3(3-t^2)y-6t=0$

$3yt^2+(4x-6)t-9y=0$

$\begin{cases} 3y=0 \\ 4x-6=0 \end{cases}$解得$\begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$，顶点为$(\dfrac{3}{2},0)$

21.已知函数$f(x)=e^2+ax^2-x$

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性：

（2）当$x\geq 0$时，$f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^3+1$，求$a$的取值范围。

【答案】（1）见解析；（2）$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

【解析】（1）当$a=1$时，$f(x)=e^2+x^2-x$，$\therefore f'(x)=e^2+2x-1$

令$g(x)=f'(x)=e^2+2x\text{-}1,\therefore g'(x)=e^2+2>0,\therefore g(x)$在R上单调递增。

又$f'(0)=0$，$\therefore$当$x<0$时，

$f'(x)<0$,当$x>0$时，$f'(x)>0$。

$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，$(0,\infty)$单调递增。

(2)　$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^x+ax^2-x\ge \frac{1}{2}x^3+1$

当 $x=0$ 时，显然成立；

当 $x>0$ 时，$\Leftrightarrow a\ge \dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$

令 $g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}(x>0)$，$g'(x)=\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x-2e^x+2\right)}{2x^3}$

令 $h(x)=x^2+2x-2e^x+2(x>0)$，$h'(x)=2x+2-2e^x+2=-2(e^x-x-1)$

易证当 $x>0$ 时，$e^x>x-1,\therefore h'(x)<0,\therefore h(x)$ 在 $(0,\infty)$ 单调递减，$\therefore h(x)<h(0)=0$

令 $g'(0)=0\Rightarrow x=2$，当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，当 $2<x$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减。

$\therefore g(x)_{\max}=g(2)=\dfrac{7-e^2}{4},\therefore a\ge \dfrac{7-e^2}{4}$

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$。

（二）选考题：共 10 分，请考生在 22 题，23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t\\ y=\sin^k t\end{cases}$ （t 为参数方程）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的参数方程为

$$4\rho\cos\theta\text{-}16\rho\sin\theta+3=0$$

(1) 当$k=1$时，C_1是什么曲线？

(2) 当$k=4$时，求C_1与C_2的公共点的直角坐标。

【答案】（1）以原点$(0,0)$为圆心，1 为半径的圆；（2）$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

【解析】（1）曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$（t 为参数方程）

$\therefore x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$　即$\therefore x^2+y^2=1$

$\therefore$曲线C_1是以原点$(0,0)$为圆心，1 为半径的圆。

（2）由题知C_2: $4x-16y+3=0$

$k=4$时，曲线C_1参数方程为　$\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$　$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}=1,$

则$x=(1-\sqrt{y})^2$　代入C_2:$4x-16y+3=0$中，　$\therefore 4(1-\sqrt{y})^2-16y+3=0$

即$7-8\sqrt{y}-12y=0, \therefore (2\sqrt{y}-1)(6\sqrt{y}-7)=0,$ 又$\sqrt{y}>0,$　则$\sqrt{y}=\frac{1}{2},$ 此时$x=\frac{1}{4}$

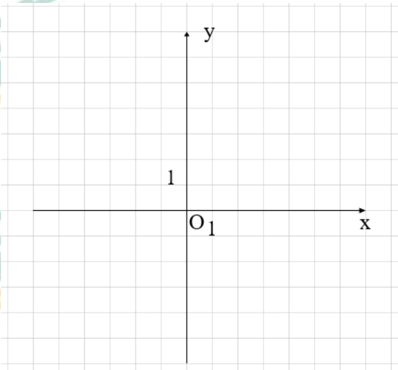
$\therefore C_1$与C_2交点的直角坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

(1)画出 $y=f(x)$ 的图像；

(2)求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.

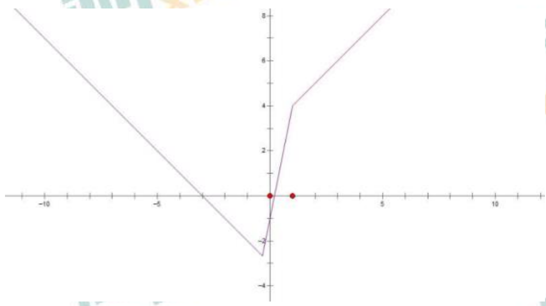


【答案】（1）如图；（2）$\{x|x<-\frac{7}{6}\}$.

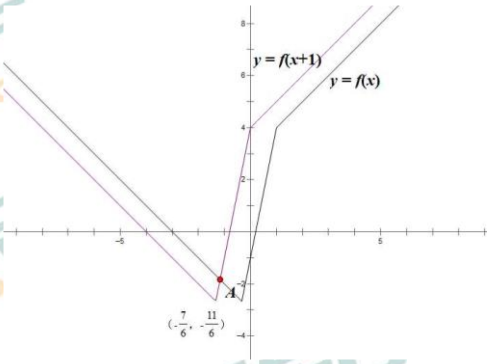
【解析】（1 解：（1）由题意得：

$$f(x)=\begin{cases}-x-3 & x<-\frac{1}{3},\\ 5x-1 & -\frac{1}{3}\le x\le 1,\\ x+3 & x\ge 1.\end{cases}$$

图像如下：



（2）将 $f(x)$ 图像向左平移得到 $f(x+1)$ 图像，如下图所示



当 $x<-\frac{1}{3}$ 时，$f(x)=-x-3$

当 $-\frac{1}{3}\le x\le 1$ 时，$f(x)=5x-1$

由图像知：当 $-\frac{1}{3}\le x\le 1$ 时，

$f(x+1)=5(x+1)-1=5x+4$

只需令 $-x-3=5x+4$ 即 $x=-\frac{7}{6}$

所以 $f(x)>f(x+1)$ 的解集为 $\{x\,|\,x<-\frac{7}{6}\}$