2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

陈祺

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.若 $z=1+i$，则 $\left|z^2-2z\right|=$（　　）

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】D

【解析】因为 $z=1+i$，所以 $z^2-2z=(1+i)^2-2(1+i)=-2$，

所以 $\left|z^2-2z\right|=\sqrt{(-2)^2}=2$

【点评】本题考查复数模长公式，属于基础题。

2.设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4\le 0\}$，$B=\{x\,|\,2x+a\le 0\}$，且 $A\cap B=\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$，则 $a=$（　　）

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

【答案】B

【解析】化简得 $A=\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$，$B=\left\{x\,|\,x\le -\frac{a}{2}\right\}$，

又因为 $A\cap B=\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$，画出数轴可以得到 $-\frac{a}{2}=1$，得 $a=-2$

【点评】本题考查集合知识，利用数轴可以轻松得到答案，属于基础题。

3.胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

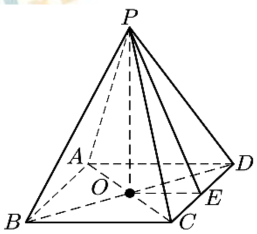
B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】画正四棱锥$P-ABCD$，设四棱锥高为h，侧面高为x，底面正方形边长为$2a$.



由题知求$\frac{x}{2a}$的值。依题得：$\begin{cases} h^2=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot x \\ h^2=x^2-a^2 \end{cases}$，消$h$得$x^2-a^2=ax$，即$\frac{x}{a}-\frac{a}{x}=1$。

令$\frac{x}{a}=t(t>0)$，即$t^2-t-1=0$，解得$t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍），

解得$\frac{x}{2a}=\frac{t}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$。故选$C$。

【点评】考查立体几何的正四棱锥性质以及换元法解方程，难度较小。但与去年维纳斯的断臂之美类似，易上热搜易唬人，实际上画图解题，转化为方程即可。

4.已知A为抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$，点$A$到$C$的焦点距离为$12$，到$y$轴的距离为$9$则 $p=$（ ）

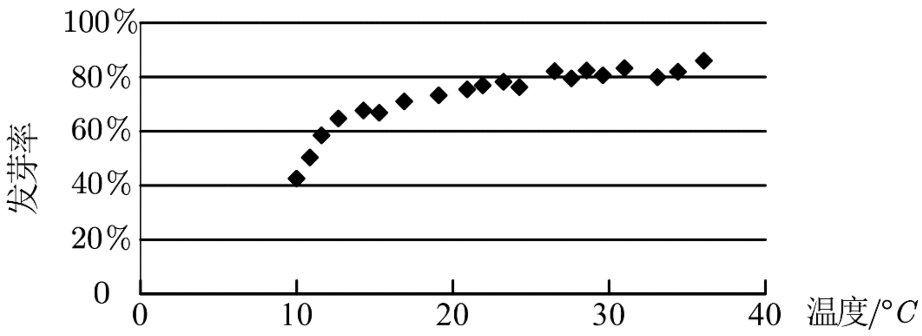
A．2　　B．3　　C．6　　D．9

【答案】C

【解析】点A到焦点F的距离等于点A到渐近线的距离等于点A到y轴的距离加上 $\frac{p}{2}$，由题可得$9+\frac{p}{2}=12$，所以$p=6$.

【点评】考查抛物线的定义，由抛物线定义可得，点A到焦点F的距离等于点A到渐近线的距离等于点A到y轴的距离加上 $\frac{p}{2}$。难度较小。

5.校一个课外学习小组为研究作物种子的发芽率 y 和温度 x（单位：$°C$）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots 20)$ 得到下面得散点图：



由此散点图，在 $10°C$ 至 $40°C$ 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是（　　）

A．$y=a+bx$　　B．$y=a+bx^2$　　C．$y=a+be^x$　　D．$y=a+b\ln x$

【答案】D

【解析】由散点图可得，x,y 为非线性相关关系，则 A 排除；又由散点图可知，x,y 为呈现正相关关系并且随着 x 增大的过程中，y 的增量逐渐趋于平缓，则 B、C、D 中只有 D 中的对数型符合.故答案选 D.

【点评】本题考查的内容为回归分析，涉及到非线性的相关关系，结合了多类函数的图像增长趋势问题，属于基础题。

6. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为（　　）

A．$y=-2x-1$　　B．$y=-2x+1$　　C．$y=2x-3$　　D．$y=2x+1$

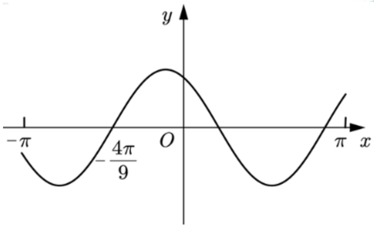
【答案】B

【解析】由题意得 $f'(x)=4x^3-6x^2$，将 $x=1$ 分别带入原函数和导函数的解析式中，得到 $f(1)=-1$，$k=f'(1)=-2$，则由点斜式可得在该点处切线方程为：$y=-2x+1$.故答案选 B .

【点评】本题考查的为导数章节中已知某点为切点的切线方程问题，求导后利用点斜式写出切线方程即可，属于常规题。

7. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（　　）

A. $\dfrac{10\pi}{9}$　　　B. $\dfrac{7\pi}{6}$　　　C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　　D. $\dfrac{3\pi}{2}$



【答案】C

【解析】由图知，$f\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)=0$，$\therefore\cos\left[\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)\omega+\dfrac{\pi}{6}\right]=0$，则

$-\dfrac{4\pi}{9}\omega+\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，$\therefore\omega=\dfrac{-9k-3}{4},k\in Z$

由图可知 $\pi<T<2\pi$，$\therefore 1<\omega<2$

$\therefore$ 取 $k=-1$ 时，$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{4\pi}{3}$ 为最小正．故答案选 C .

【点评】本题考察三角函数的图像与性质，属于基础题。

8. $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$的展开式中$x^3y^3$的系数为（）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

【答案】C

【解析】$(x+y)^5$的通项为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}y^r$

则$\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x+y)^5=C_5^r x^{6-r}y^r+C_5^r x^{4-r}y^{r+2}$，

当$r=3$和$r=1$时对应含有x^3y^3的项，系数为$C_5^1+C_5^3=15$，故答案选C．

【点评】本题考察二项式定理中的两个二项式相乘的题型，比较常规，属于基础题。

9．已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】$\because 3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，$\therefore 3\left(2\cos^2\alpha-1\right)-8\cos\alpha=5$，

化简得：$3\cos^2\alpha-4\cos\alpha-4=0$，解得$\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$或$\cos\alpha=2$（舍）

$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，又$\alpha\in(0,\pi)$，$\therefore\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，故选$A$．

【点评】本题主要考察二倍角公式以及同角关系式的应用，属于基础题．

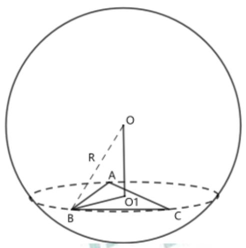
10．已知A，B，C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为ΔABC的外接圆，若

⊙ O_1 的面积为 4π， $AB = BC = AC = OO_1$， 则球 O 的表面积为（　）

A． 64π　　B． 48π　　C． 36π　　D． 32π

【答案】 A

【解析】因为⊙ O_1 的面积为 4π，所以 ΔABC 的外接圆的半径为 2，$\therefore O_1B = 2$，由正弦定理 $\dfrac{BC}{\sin A} = 2r = 4$ 可得， 等边 ΔABC 的边长为 $2\sqrt{3}$． 又 $\because OB^2 = OO_1^{\ 2} + O_1B^2 = R^2$， 球 O 的半径为 $R = 4$， 所以球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$．



【点评】本题重点考察学生的空间想象能力和球的基本性质，注重对学生基础知识的考察和运用，主要的知识点为正弦定理和球的表面积公式，属于中等题型，难度一般。

11.已知⊙ M: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$，直线 $l: 2x + y + 2 = 0$， P 为 l 上动点，过点 P 作⊙ M 的切线 PA， PB， 切点 A， B， 当 $|PM||AB|$ 最小值时， 直线 $|AB|$ 的方程为（　）

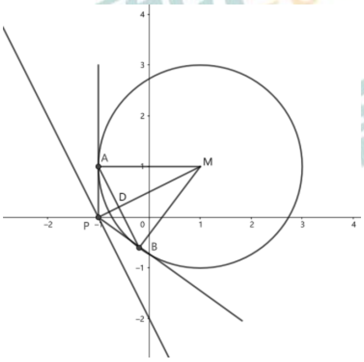
A． $2x - y - 1 = 0$　　B． $2x + y - 1 = 0$　　C． $2x - y + 1 = 0$　　D． $2x + y + 1 = 0$

【答案】D

【解析】 由题可知⊙ $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$， $l: 2x + y + 2 = 0$， 由相切可得 $PA \perp MA$， $PB \perp MB$， 垂径定理可得 $MP \perp AB$ 于 D， 四边形 $MAPB$ 面积可知 $|MP||AB| = |MA||PA| = 2|PA|$，

$\therefore$当$|PM||AB|$最小即$|PA|$最小，又$\because |PA|^2=|MP|^2-|MA|^2=|MP|^2-4$，即$|MP|$最小，即$P$到$l$距离$|MP|_{\min}=\dfrac{|2+1+2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，$|PA|=1\ \therefore k_{AB}=k_l=-2$，由三角形等积可得$|DA|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$|DP|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，设$l_{AB}:2x+y+c=0$，由平行直线间距离$|DP|=\dfrac{|2-c|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$可得$c=1$，

$\therefore l_{AB}:2x+y+1=0$，选 D



【点评】本题考查直线与圆相切、垂径定理、点到直线距离、平行直线间距离等综合平面解析几何问题，需要学生合理转化最值条件，判断最值位置，计算难度适中，属于中档题。

12.若$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（　　）

A．$a>2b$　　B．$a<2b$　　C．$a>b^2$　　D．$a<b^2$

【答案】B

【解析】

法一：由已知$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=4^b+\log_4 b^2=4^b+\log_2 b$，且$a>0$，$b>0$

令$b=1$，则$2=2^1+\log_2 1<2^a+\log_2 a=4<2^2+\log_2 2=5$，则$1<a<2$。即，可排除选项$AD$。

令$b=2$，则$2^3+\log_2 3<2^a+\log_2 a=17<2^4+\log_2 4=18$，则$3<a<4$。即，可排除选项$C$。

故可得答案为 B

法二：由已知 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=4^b+\log_2 b=2^{2b}+\log_2 2b-1$，且 $a>0$，$b>0$，则构造函数 $f(x)=2^x+\log_2 x$，则原式等价于 $f(a)=f(2b)-1$；易得函数 $f(x)$ 为单调增函数，则可得答案为 B。

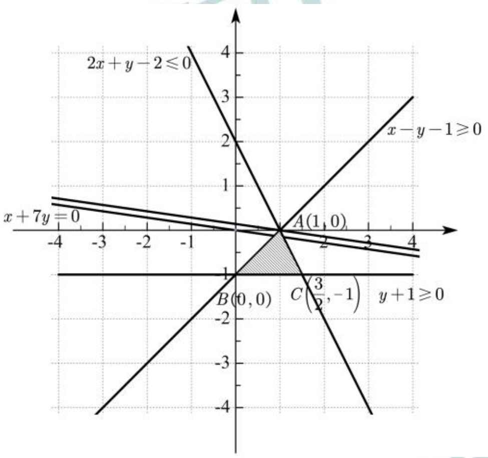
【点评】本题重点考察学生的运算能力和演变能力及构造函数能力，考查学生对题目给定的条件的等价处理能力，需要把题目复杂问题简单化，利用排除法选取几个特殊值带入验证即可得出或者利用整体思想构造新函数利用单调性也可得出答案。属于中等题。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\le 0\\ x-y-1\ge 0\\ y+1\ge 0\end{cases}$，则 $z=x+7y$ 的最大值是____________.

【答案】1

【解析】由题意根据约束条件作出如下可行域：



由图可知，当目标函数经过 $(1,0)$，z 取得最大值为 1.

【点评】本题考察截距式线性规划求最值问题，属于基础题。

14.设$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$|\vec{a}+\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$______.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

依题可知：$|\vec{a}+\vec{b}|=1$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$，$\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$

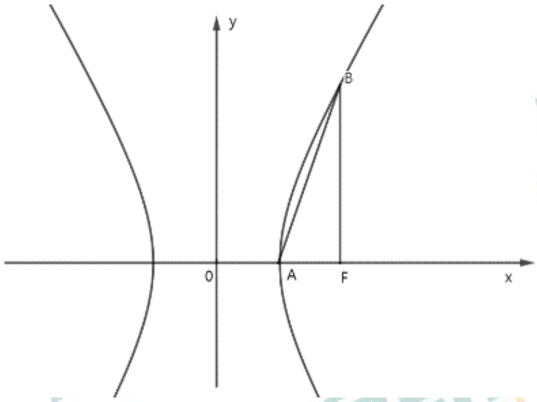
$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

【点评】本题考察单位向量的概念以及平面向量模长和基本运算，结合完全平方公式的应用，属于基础题。

15.已知F为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点，$A$为$C$的右顶点，$B$为$C$上的点，且$BF$垂直于$x$轴。若$AB$的斜率为$3$，则$C$的离心率为______

【答案】2

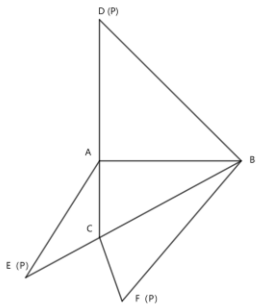
【解析】如图，由题意可得点$A(a,0)$，$F(c,0)$的坐标。又BF垂直于x轴，可得点$B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$。$\because k_{AB}=3$，$\therefore\frac{BF}{AF}=3$,又$AF=c-a$，$\therefore BF=3(c-a)$，$B$点的纵坐标为$y_B=3(c-a)$。$\therefore\frac{b^2}{a}=3(c-a)$，计算可得$b^2=3a(c-a)$①，又$c^2=a^2+b^2$②，联立①和②可得$2a^2+c^2-3ac=0$，两边同除$a^2$可得：$e^2-3e+2=0$，知：$e=2$或$e=1$（舍），所以可得$C$的离心率为$2$。



【点评】此题考查了圆锥曲线中双曲线的离心率问题，涉及通径、直线斜率以及双曲线的定义，构造齐次式可求离心率的值，属于中档题。

16．如图，在三棱锥$P-ABC$的平面展开图中，

$AC=1, AB=AD=\sqrt{3}, AB\perp AC$， $AB\perp AD, \angle CAE=30^{\circ}$， 则$\cos\angle FCB=$__________.



【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】在$Rt\Delta DAB$中， $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{6}$,

在 $Rt\Delta ABC$ 中，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2$，

由展开图的性质可得 $DA=AE=\sqrt{3},CE=CF,BF=BD=\sqrt{6}$ ，

在 ΔACE 中，由余弦定理得 $CE=\sqrt{AE^2+AC^2-2AE\cdot AC\cos\angle CAE}=1$ ，

$\therefore CF=CE=1$ 。

在 ΔCFB 中，由余弦定理得 $\cos\angle FCB=\dfrac{CF^2+CB^2-BF^2}{2CF\cdot CB}=-\dfrac{1}{4}$ 。

【点评】本题属于空间几何题展开图问题，展开图中得计算结合解三角形相关知识点，属于中等题目。

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17．（12 分）

设 $\{a_n\}$ 是公比部位 1 的等比数列，a_1 为 a_2，a_2 的等差中项.

（1）求 $\{a_n\}$；

（2）若 $a_1=1$，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】（1）$q=-2$；（2）$S_n=\dfrac{1}{9}-(\dfrac{1}{9}+\dfrac{n}{3})(-2)^n$

【解析】 （1）设 $\{a_n\}$ 数列的公比为 $q(q\neq 1)$．由题意可知：$2a_1=a_2+a_3$，$2a_1=a_1q+a_1q^2$ ，则 $2=q+q^2$，解得 $q=-2$ 或者 $q=1$（舍去）。则数列 $\{a_n\}$ 得公比为 -2；

（2）由(1)知 $a_n=a_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$，令 $b_n=na_n=n\cdot(-2)^{n-1}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

$S_n=1\cdot(-2)^0+2\cdot(-2)^1+\ldots+n\cdot(-2)^{n-1}$ ①

$-2S_n=1\cdot(-2)^1+2\cdot(-2)^2+\ldots+(n-1)\cdot(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$ ②

① - ②得：$3S_n=(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2\ldots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n$, $3S_n=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^n$ 整理得

$S_n=\dfrac{1}{9}-(\dfrac{1}{9}+\dfrac{n}{3})(-2)^n$；

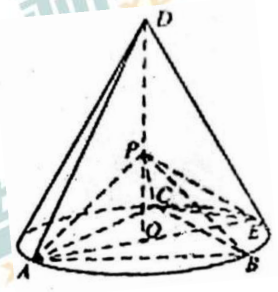
【点评】此题主要考查考生对数列求通项和数列求和的理解和运用，属于中等题 ．第一问结合等差数列的性质等差中项列出等式，进而求解出等比数列的公比，注意公比不为1，所以舍去一个；第二问考察数列求和中错位相减法的运用，主要是考察计算能力。

18．（12 分）

如图, D 为圆锥的顶点， O 是圆锥地面的圆心， AE 为地面直径， $AE=AD$，ΔABC 是底面的内接正三角形， P 为 DO 上一点， $PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DC$.

(1)证明： $PA\perp$ 平面 PBC

(2)求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.



【答案】见解析

【解析】:

（1）证明：由圆锥性质可知，$DO\perp$圆O所在平面，连接BO

不妨设$AE=AD=2$，所以$DO=\sqrt{3}$，$BO=AO=1$

因为$PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DC$，所以$PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

在直角三角形POA中，$PA=\sqrt{AO^2+PO^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

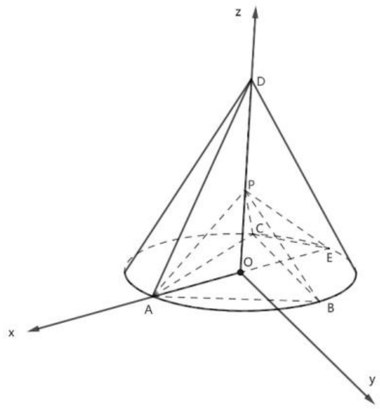
在直角三角形POB中，$PB=\sqrt{BO^2+PO^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

又因为ΔABC是底面的内接正三角形，所以$AB=\sqrt{3}$

所以$PA^2+PB^2=AB^2$,所以$PA\perp PB$，同理可证$PA\perp PC$

又PB、$PC\subset$平面PBC，$PB\cap PC=P$，$PA\perp$平面PBC

（2）由（1）可知$PA\perp$平面PBC，所以$PA\perp BC$，因为$DO\perp$圆O所在平面，所以$PO\perp BC$，又$PA\cap PO=P$,所以$BC\perp PAE$，作$Oy// BC$，建立如图所示的空间直角坐标系；



$A(a,0,0)$， $B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$， $P\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$， $E(-1,0,0)$

$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{PE}=\left(-1,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AP}=\left(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$是平面$PBC$的一个法向量

设平面PEC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\vec{n}\perp PC\\ \vec{n}\perp PE\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ -x-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$$

取$z=\sqrt{2}$， 得$\vec{n}=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

$$\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AP}\right\rangle=\frac{1+1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{3}+2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

所以锐二面角$B-PC-E$的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点评】本题主要考查空间点、线、面的位置关系，线面垂直，二面角及空间坐标系等基础知识与基本技能，考查用向量方法解决数学问题的能力．意在考查考生的空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．

19．（12 分）

甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束．

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空．设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$．

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率．

【答案】（1）$\frac{1}{16}$（2）$\frac{3}{4}$（3）$\frac{7}{16}$

【解析】

（1）记“甲连胜四场”为事件M，A_k为甲在第k局中获胜．

$\therefore P(M)=P(A_1A_2A_3A_4)=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

（2）记“需要进行第五场比赛”为事件N，事件A为甲输，事件B为乙输，事件C为丙输．

$\therefore$四局内结束比赛的概率为

$P=P(ABAB)+P(ACAC)+P(BABA)+P(BCBC)=4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

$\therefore P(N)=1-P=\frac{3}{4}$

（3）记“丙最终获胜”为事件 D．

$\therefore P(D)=P(ABAB)+P(ABACB)+P(ABCAB)+P(ABCBA)+P(ACABB)+P(ACBAB)$

$=\dfrac{1}{16}\times 2+10\times (\dfrac{1}{2})^5$

$=\dfrac{7}{16}$

【点评】本题结合羽毛球比赛，普及一下常见体育规则，知道如何能获胜．第一小题考查相互独立事件同事发生的概率计算方法，属于简单题．第二、三小问考查对基本事件的分析能力，有一定计算量，属于中档题．

20. （12 分）

已知 A,B 分别为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一个交点为 C，PB 与 E 的另一个交点为 D.

（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点。

【答案】见解析

【解析】（1）由题可知 $A(-a,0),B(a,0),G(0,1)$ 则 $\overrightarrow{AG}=(a,1),\overrightarrow{GB}=(a,-1)$

又 $\because \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$ 即 $(a,1)\cdot(a,-1)=8$ $\therefore a^2=9$ 则 $a=3$

$\therefore$ E 方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$；

（2）设 $P(6,y_0)$ 则 $l_{AP}:\frac{y-0}{y_0-0}=\frac{x+3}{6+3}$ 即 $y=\frac{y_0}{9}(x+3)$

$l_{BP}:\frac{y-0}{y_0-0}=\frac{x-3}{6-3}$ 即 $y=\frac{y_0}{3}(x-3)$

联立 l_{AP} 与 E 得 $C\left(\frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2},\frac{6y_0}{9+y_0^2}\right)$

同理得 $D\left(\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2},\frac{-2y_0}{1+y_0^2}\right)$，

$$\therefore l_{CD}\ 斜率为\ \frac{\frac{-2y_0}{1+y_0^2}-\frac{6y_0}{9+y_0^2}}{\frac{3y_0^2-3}{1+y_0^2}-\frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2}}=-\frac{4y_0}{3(y_0^3-3)}$$

$$\therefore l_{CD}:y-\frac{6y_0}{9+y_0^2}=-\frac{4y_0}{3(y_0^3-3)}\left(x-\frac{27-3y_0^2}{9+y_0^2}\right)\ 即\ y=--\frac{4y_0}{3(y_0^3-3)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$\therefore$ 直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$

【点评】本题考察的是圆锥曲线的基本性质和以及直线与圆锥曲线的位置关系，总体难度比较小，主要需要注意的是计算上不要失分。除此之外都属于平常常见的基本处理方式

21. （12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x\ge 0$时，$f(x)\ge \frac{1}{2}x^3+1$，求a的取值范围

【答案】（1）$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增（2）$a\in[\frac{7-e^2}{4},+\infty)$

【解析】

（1）当$a=1$时，$f(x)=e^x+x^2-x$，

$f'(x)=e^x+2x-1$，$f''(x)=e^x+2>0$易知导函数单调递增又$f'(0)=0$，

当$x\in(-\infty,0)$时$f'(x)<0$即$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减

当$x\in(0,+\infty)$时$f'(x)>0$即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

（2）当$x\ge 0$时，$f(x)\ge \frac{1}{2}x^3+1$，$e^x+ax^2-x\ge \frac{1}{2}x^3+1$，

方法一：$e^x\ge \frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1$，$1\ge \dfrac{\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1}{e^x}$，$\dfrac{\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1}{e^x}-1\le 0$

令$g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1}{e^x}-1$，$g'(x)=\dfrac{-x(x-2)[x-(2a+1)]}{2e^x}$

①$2a+1\le 0$时，即$a\le -\frac{1}{2}$

当$x\in(0,2)$时$g'(x)>0$即$g(x)$在$(0,2)$上单调递增

当$x\in(2,+\infty)$时$g'(x)<0$即$g(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减

$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\frac{7-4a}{e^2}-1\le 0$此时无解

②$2a+1\ge 2$时，即$a\ge \frac{1}{2}$

当$x\in(0,2)$时$g'(x)<0$即$g(x)$在$(0,2)$上单调递减

当$x\in(2,2a+1)$时$g'(x)>0$即$g(x)$在$(2,2a+1)$上单调递增

当 $x\in(2a+1,+\infty)$ 时 $g'(x)<0$ 即 $g(x)$ 在 $(2a+1,+\infty)$ 上单调递减

又 $g(0)\le 0$，$g(2a+1)\le 0$ 即 $\dfrac{\frac{1}{2}(2a+1)^2+(2a+1)+1}{e^{2a+1}}-1\le 0$

令 $t=2a+1(t\ge 2)$，$h(t)=\dfrac{\frac{1}{2}t^2+t+1}{e^t}-1$，

$h'(t)=\dfrac{-t^2}{2e^t}<0$，$h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore h(t)<h(0)=0$ 恒成立，$\therefore a\ge\dfrac{1}{2}$

③ $0<2a+1<2$ 时，$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

当 $x\in(0,2a+1)$ 时 $g'(x)<0$ 即 $g(x)$ 在 $(0,2a+1)$ 上单调递减

当 $x\in(2a+1,2)$ 时 $g'(x)>0$ 即 $g(x)$ 在 $(2a+1,2)$ 上单调递增

当 $x\in(2,+\infty)$ 时 $g'(x)<0$ 即 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减

$g(0)\le 0$，$g(2)=\dfrac{7-4a}{e^2}-1\le 0$，$\dfrac{7-e^2}{4}\le a<\dfrac{1}{2}$

综上所述 $a\in[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty)$

方法二：

当 $x=0$ 时，不等式显然成立

当 $x>0$ 时，$a\ge\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$，令 $\varphi(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2},x\in(0,+\infty)$

则 $\varphi'(x)=\dfrac{(x-2)[x^2+2x-2e^x+2]}{2x^3},x\in(0,+\infty)$

令 $\eta(x)=x^2+2x-2e^x+2,x\in(0,+\infty)$，则 $\eta'(x)=2x+2-2e^x,x\in(0,+\infty)$

$\eta'(x)=-2(e^x-x-1),x\in(0,+\infty)$ 易得当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^x>x+1$，$\therefore\eta'(x)<0$ 恒成立

故 $\eta(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减 $\therefore\eta(x)<\eta(0)=0$ 故令 $\varphi'(x)=0$ 时 $x=2$

当 $x\in(0,2)$ 时 $\varphi'(x)>0$ 即 $\varphi(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增

当 $x\in(2,+\infty)$ 时 $\varphi'(x)<0$ 即 $\varphi(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(2) = \dfrac{7-e^2}{4}$， $\therefore a \ge \dfrac{7-e^2}{4}$ 综上所述 $a \in [\dfrac{7-e^2}{4}, +\infty)$

【点评】

本次高考数学理科，导数回到了解答题压轴位置，考察了函数单调性的讨论以及不等式中参数的取值范围。一眼看去好像很简单，但是第二问的参数范围求解，还是需要基础扎实的前提下，耐心和细心才能得到结果，并且意外的并不是什么思想方法的高端，而是计算思路的特殊。本题需要考生有扎实的基本功，对于常见的处理导数的方法与技巧要熟练掌握，走江湖地利用“洛必达”描述函数图像在本题是行不通的。

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^k t \\ y = \sin^k t \end{cases}$ (t为参数). 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta - 16\rho\sin\theta + 3 = 0$.

(1) 当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

(2) 当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

【答案】(1) C_1 是圆　　(2) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

【解析】(1) 因为当$k=1$时，$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$，所以$C_1$是圆心为$(0,0)$，半径为1的圆.

(2) 当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$($t$为参数)，化简得$\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\ \sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$($t$为参数)，所以可得曲线$C_1$的直角坐标方程为$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，因为曲线$C_2$的极坐标方程为$4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$，所以可得曲线$C_2$的直角坐标方程为$4x-16y+3=0$，联立曲线$C_1$与$C_2$的直角坐标方程可得$12x+32\sqrt{x}-13=0$，从而解得$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$或者$\sqrt{x}=\frac{13}{6}$，所以解得$x=\frac{1}{4}$或者$x=\frac{169}{36}$，因为$x\le 1$，所以$x=\frac{169}{36}$舍去，所以$C_1$与$C_2$的公共点的直角坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

【点评】本题第一小题考查圆的参数方程以及参数方程化成直角坐标方程，属于简单题.

第二小问结合同角三角函数关系式的运用以及含参曲线参数的化简，极坐标方程转化成直角坐标方程以及二次方程的计算，有一定计算量，属于中档题.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$

（1）画出 $y=f(x)$ 的图像

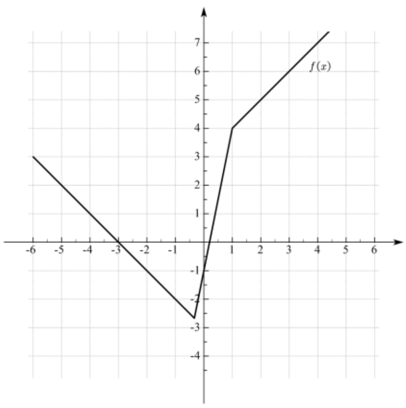
（2）求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集

【答案】（1）详见解析（2）$\left\{x\middle|x<-\frac{7}{6}\right\}$

【解析】

（1）当 $x\le-\frac{1}{3}$ 时，则 $f(x)=-x-3$；当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，则 $f(x)=5x-1$；当 $x\ge1$ 时，则 $f(x)=x+3$

综上：$f(x)=\begin{cases}-x-3, x\le-\frac{1}{3}\\ 5x-1,-\frac{1}{3}<x<1\\ x+3, x\ge1\end{cases}$



（2）$f(x+1)=|3(x+1)+1|-2|(x+1)-1|=|3x+4|-2|x|$

要求 $f(x)>f(x+1)$ 的解集等价于求 $f(x)-f(x+1)>0$ 的解集

令 $g(x)=f(x)-f(x+1)$ 则 $g(x)=|3x+1|-2|x-1|-|3x+4|+2|x|$

当 $x\le-\frac{4}{3}$ 时，则 $g(x)=1>0$ 成立

当 $-\frac{4}{3}<x<-\frac{1}{3}$ 时，则 $g(x)=-6x-7$，则 $g(x)=-6x-7>0$，即 $x<-\frac{7}{6}$。则 $-\frac{4}{3}<x<-\frac{7}{6}$

当 $-\frac{1}{3}\le x<0$ 时，则 $g(x)=-5$ 不成立

当 $0\le x<1$ 时，则 $g(x)=4x-5$，则 $g(x)=4x-5>0$，即 $x>\frac{5}{4}$。则无解

当 $x \geq 1$ 时，则 $g(x) = -1$ 不成立。综上：不等式的解集为 $\left\{x \middle| x < -\frac{7}{6}\right\}$

【点评】本题考查了含有绝对值不等式的解法与应用。也考查解不等式的分类问题。