2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学二）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

1. $\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$ 是 x^7 的

（A）低阶无穷小　（B）等价阶无穷小　（C）高阶无穷小　（D）同阶但非等价无穷小

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取得极大值　（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数为零　（D）可导且导数不为零

3. 有一圆柱体，底面半径与高随时间的变化率分别为 $2cm/s$，$-3cm/s$，当底面半径为 $10cm$，高为 $5cm$ 时，圆体的体积与表面积随时间的变化速率为

（A）$125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$　（B）$125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

（C）$-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$　（D）$-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

4. 函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$　（B）$(0,e)$　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

5. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+a+bx^2$，则

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{2}$　（C）$a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　（D）$a=0,b=\dfrac{1}{2}$

6. 设函数 $f(u,v)$ 可微且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$　（B）$dx-dy$　（C）dy　（D）$-dy$

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

(A) 2，0　(B) 1，1　(C) 2，1　(D) 1，2

9. 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示出，则

(A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 解　(B) $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 解

(C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 解　(D) $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 解

10. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，则 P、Q 分别取

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

11. $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$____________．

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1\\y=4(t-1)e^t+t^2\end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$____________．

13. 设 函 数 $Z=Z(x,y)$ 由 方 程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确 定 ， 则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}=$____________ .

14. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}dy$，则 $f'(\frac{\pi}{2})=$____________ .

15. 微分方程有 $y'''-y=0$ 的通解为____________ .

16. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为____________ .

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

18. 设函数 $f(x)=\frac{x|x|}{1+x}$，求函数 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

19. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+c$， L 为曲线 $y=f(x)(4\le x\le 9)$. 记 L 的长度为 S， L 绕 x 轴旋转的旋转曲面的面积为 A，求 S 和 A.

20. $y=y(x)(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$ 的解.

(1) 求 $y(x)$；

(2) 设 p 为曲线 $y(x)$ 上的一点，记 p 处法线在 y 轴上的截距为 I_p. I_p 最小时，求 p 的坐标.

21. 设 D 由曲线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2\left(x\ge 0,y\ge 0\right)$ 与 x 轴围城，求 $\iint\limits_D xydxdy$.

22. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$仅有两个不同特征值，若 A 相似于对角矩阵.求 a,b .求逆矩阵 p ，

使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

2021 考研数学试卷答案速查（数学二）

一、选择题

(1)（C）　(2)（D）　(3)（C）　(4)（A）　(5)（D）

(6)（C）　(7)（B）　(8)（B）　(9)（D）　(10)（C）

二、填空题

(11) $\dfrac{1}{\ln 3}$　(12) $\dfrac{2}{3}$　(13) 1

(14) $\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$　(15) $y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(16) -5

三、解答题

(17)【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$（2 分）

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$$（4 分）

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x^2)+1-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$$（7 分）

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim_{x\to0}e^{x^2}$$（9 分）

$$=\frac{1}{2}$$（10 分）

(18)【解析】$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases}$，$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x<0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x>0\end{cases}$.（4 分）

凹区间：$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$；　凸区间：$(-1,0)$（6 分）

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，垂直渐近线：$x=-1$.（7 分）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{1+x}=-1$,（9 分）

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x(1+x)}=-1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+x^2}{1+x}=1$,（11 分）

斜渐近线：$y=x-1$和$y=-x+1$.（12 分）

(19)【解析】等式左右两边对 x 求导，$\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}x-1$，$f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$（2 分）

长度 $s=\int_4^9\sqrt{1+f^2(x)}dx=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_4^9\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx$（5 分）

$=\int_4^9\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_4^9=\frac{22}{3}$.（7 分）

面积 $A=\int_4^9 2\pi f(x)\sqrt{1+f^2(x)}dx=\int_4^9 2\pi\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$（10 分）

$=\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1\right)dx=\pi\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2+x\right)\Big|_4^9=\frac{425}{9}\pi$.（12 分）

(20)【解析】（1）求解微分方程：$y'-\frac{6}{x}y=-\frac{6}{x}$，（1 分）

则：$y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left[\int-\frac{6}{x}\cdot e^{\int\frac{6}{x}dx}dx+C\right]=x^6\left[\int-\frac{6}{x}\cdot x^{-6}dx+C\right]=Cx^6+1$，（4 分）

且 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$，故：$y(x)=\frac{1}{3}x^6+1$，$(x>0)$.（6 分）

（2）设 p 点的坐标为：(x,y) ，法线：$Y-y=-\frac{1}{y'(x)}(X-x)$，

过 p 点的法线方程为：$Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x)$，（8 分）

$X=0$时，y 轴上的截距：$I_p=Y=\frac{1}{2x^4}+y=\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}x^6+1$，（9 分）

令 $I_p'=-\frac{2}{x^5}+2x^5=0$，得驻点：$x=1$，唯一的极值点为最值点，（11 分）

则 I_p 最小时，p 的坐标为$(1,\frac{4}{3})$.（12 分）

(21)【解析】$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r^3dr$

（6 分）

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta\cdot\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\cdot\cos^2 2\theta d\theta$$（9 分）

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\cos 2\theta=-\frac{1}{48}\cos^3 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}.$$（12 分）

(22)【解析】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & -a & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)\left[(\lambda-2)^2-1\right]=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$（2 分）

（1）当 $b=1$ 时， $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$，$A$ 相似于对角矩阵，则 $r(E-A)=1$，$a=1$（4 分）

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.（7 分）

（2）当 $b=3$ 时， $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$， A 相似于对角矩阵，则 $r(3E-A)=1$， $a=-1$（9 分）

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.（12 分）