2021 考研数学整体评述

关键词：整体难度适中，基本点较多，计算量大

今年的考试题目从考点难度上来说，是比较平稳的一年，没有什么偏，怪，难的题型。但是从考题细节上来说，确实对基本功计算，基础要求相对比较高的一年。今年考题抛弃了证明题，很意外的三套数学卷子没有出现一个微分中值定理的证明或者是等式/不等式的证明，这使得整套卷子的大题方向全部偏向于计算。

数学一：选择填空题内容相对比较常见，从导数定义到偏导数计算以及定积分定义，秩的定义，都是些基础题型。当然，也有像欧拉方程和简单高斯定理的数一特色题型。大题方面，变限积分的拆分计算属于基础极限计算，难度不大。级数题目属于两类级数的合体，有一些难度，尤其在收敛域上。区域最值问题属于比较典型的题目了，就是计算量有些偏大。格林公式的“挖洞”类型，去年也有所涉及，因此今年也并不意外。线性代数的含参类型的正交单位化以及特征值，特征向量的性质也是属于常见考点。概率论仍然是二维函数的函数分布类型。总体来看，数一大题题型还是很常见的，只是个别题目计算量还是很大的。

数学二：选择填空题在基本考题基础上有如下特色题型：变化率问题，二重积分的交换积分次序，还有新大纲加入的高阶微分方程，整体计算量不大，题目难度也比较适中，题型较为常见。大题方面考了分段函数的二阶导以及渐近线，该题计算量不大；弧长和旋转曲面面积属于典型的数二特色考题，只是数字不大好算；微分方程加基础几何学也比较常见；二重积分极坐标加三角积分也是近些年来二重积分考试的常见套路；线性代数的相似对角化是相对比较基础的特征值特征向量的运用部分；总的来说，数二考题更加基础，典型，除了极个别的计算有些复杂，难度不大。

数学三：选择填空的特色题型有参数估计，常见的差分方程，区间内瑕点的反常积分，总的来说，计算量不大，题型也比较典型。大题方面，极限题目考的为左右极限，这个难度比起数一数二要低；二元函数的极值，去年也有所涉及，属于典型考题类型，计算量不大；二重积分积分区域比较简单，但是积分次序的选取还是很有亮点的，计算量大；微分方程与级数结合考查，计算量一般。总体来说，数三除了二重积分计算量比较大以外，其余题目的特点还是非常基础和非常符合数三考试特色的。

2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学一）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1\quad,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取得极大值（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数为零（D）可导且导数不为零

【答案】（D）

【分析】本题主要考察函数的连续性、可导性以及极值点的概念，用定义直接计算即可。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，即该函数在 $x=0$ 处连续。

由导函数极限存在定理得：$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x+1}{x^2}$，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

故该函数可导，且导数不为零.

2. 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$ （B）$dx-dy$ （C）dy （D）$-dy$

【答案】（C）

【分析】本题考察复合函数求导以及函数的全微分，考生需要熟练复合函数的求导法则。

【解析】由 $f_x'\left(x+1,e^x\right)=f_1'\left(x+1,e^x\right)+f_2'\left(x+1,e^x\right)e^x=2x(x+1)+(x+1)^2$ ①；

$f_x'\left(x,x^2\right)=f_1'\left(x,x^2\right)+f_2'\left(x,x^2\right)2x=4x\ln x+2x$ ②

①中令 $x=0$，得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$；②中令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$

联立得，$f_1'(1,1)=0$，，$f_2'(1,1)=1$

故 $df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

（A）$a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$ （B）$a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

（C）$a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$ （D）$a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

【答案】选（A）.

【分析】本题考察学生泰勒公式以及待定系数法的使用。

【解析】因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$，在 $x=0$ 的邻域内，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)$，所以，

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)}{1+x^2}=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3),$$

所以 $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$ （B）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$ （D）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

【答案】选（B）

【分析】本题考察定积分的定义，需要考生灵活理解定积分的极限定义。

【解析】用特值法，令 $f(x)=1$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，

选项（A），$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{2k-1}{2n})\dfrac{1}{2n}=n\cdot\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}$，排除；同理，选项（B）为 $n\cdot\dfrac{1}{n}=1$；

选项（C）为 $2n\cdot\dfrac{1}{n}=2$，排除；选项（D）为 $2n\cdot\dfrac{2}{n}=4$ 排除；所以选择（B）.

或者，将区间 $[0,1]$ n 等分，每一块长度均为 $\dfrac{1}{n}$，其中第 k 块小区间为 $\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$，取区间的中点为 $\xi_k=\dfrac{2k-1}{2n}$，

由定义积分定义可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，故选 B。

A 选项 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

C 选项 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

D 选项 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数依次为

（A） 2,0 （B）1,1 （C）2,1 （D）1,2

【答案】（B）

【分析】本题考察二次型配方法以及惯性指数的定义，需要考生能够熟练的配方或计算特征值。

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^{\;2}+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，从而二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求其特征值

$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda=0$，特征值分别为$0,-1,3$，故正负惯性指数分别为 1，1.

【典型错误】考生容易直接根据题干配方得到选项 C，而忽略了配方法化二次型为标准型要求变换必须可逆的条件。

6. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为

（A）$\frac{5}{2},\frac{1}{2}$ （B）$-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$ （C）$\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$ （D）$-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

【答案】选（A）

【分析】本题考察向量组的施密特正交化，需要考生牢记基本公式。

【解析】$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，线性无关，则 β_1,β_2,β_3 由施密特正交化知

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{4}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

所以 $l_1=\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=\frac{5}{2},l_2=\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=\frac{1}{2}$.

7. 设 A,B 为 n 阶实矩阵，下列不成立的是

（A）$r\begin{pmatrix}A&O\\O&A^TA\end{pmatrix}=2r(A)$ （B）$r\begin{pmatrix}A&AB\\O&A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

（C）$r\begin{pmatrix}A&BA\\O&A^TA\end{pmatrix}=2r(A)$ （D）$r\begin{pmatrix}A&O\\BA&A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

【答案】选 C

【分析】本题考察矩阵秩的性质，考生若有举反例的能力，解题会更顺畅。

【解析】用特值法，设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},A^TA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix},\text{则}\begin{pmatrix}A & BA\\ 0 & AA^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以，$r\begin{pmatrix}A & BA\\ 0 & AA^T\end{pmatrix}=3\neq 2r(A)$，选项 C 错.

或者，也可以根据 BA 是 A 的行向量组构成的矩阵知，不一定可以被 A 的列向量组表示，而选（C）.

8. 设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列为假命题的是

（A）若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\overline{B})=P(A)$

（B）若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

（C）若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

（D）若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

【答案】（D）

【分析】本题考察条件概率的基本公式，需要考生具有一定的化简能力。

【解析】（D）已知 $P(A|A\mathrm{U}B)>P(\overline{A}|A\mathrm{U}B)$，根据条件概率公式，有 $\dfrac{P(A\mathrm{I}\ (A\mathrm{U}B))}{P(A\mathrm{U}B)}>\dfrac{P(\overline{A}\mathrm{I}\ (A\mathrm{U}B))}{P(A\mathrm{U}B)}$；因为 $P(A\mathrm{U}B)=P(A)+P(B)-P(AB)>0$，则有：$P(A\mathrm{I}\ (A\mathrm{U}B))>P(\overline{A}\mathrm{I}\ (A\mathrm{U}B))$，而

$P(A\mathrm{I}\ (A\mathrm{U}B))=P(AA\mathrm{U}AB)=P(A\mathrm{U}AB)=P(A)$

$P(\overline{A}\mathrm{I}\ (A\mathrm{U}B))=P(\overline{A}A\mathrm{U}\overline{A}B)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(BA)$

从条件能得到 $P(A)>P(B)-P(BA)$ 但是得不到 $P(A)>P(B)$，所以（D）选项是假命题。

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_1;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=u_1-u_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则

（A）$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏差估计，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$\hat{\theta}$不是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（C）$\hat{\theta}$是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（D）$\hat{\theta}$不是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】（C）

【分析】本题考察二维正态分布以期望、方差和协方差的计算，需要考生有一定的计算能力。

【解析】因为$(X_i,Y_i)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，于是$X_i\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y_i\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$X_i,Y_i$相关系数为$\rho$；同时$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$相互独立，$X_i,Y_j(i\neq j)$相互独立．$\bar{X}:\ N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}),\bar{Y}:\ N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n})$

$E(\hat{\theta})=E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，于是$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计

$$D(\hat{\theta})=D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})-2Cov(\bar{X},\bar{Y})=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-2Cov\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n},\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}\right)$$

$$=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}Cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}Cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}\cdot nCov\left(X_i,Y_i\right)$$

其中$Cov\left(X_i,Y_i\right)=\rho\cdot\sqrt{DX_i}\cdot\sqrt{DY_i}=\rho\sigma_1\sigma_2$

于是$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}-\dfrac{2}{n}\rho\sigma_1\sigma_2=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

选（C）

10. 设$X_1,X_2,...,X_{16}$是来自总体$N(\mu,4)$简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10,\Phi(x)$表示标准正太分布函数，若该检验问题的拒绝域为$W=\left\{\bar{X}\ge 11\right\}$,其中$\bar{X}=\dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则$\mu=11.5$，该检验犯第二类错误的概率为

（A）$1-\Phi(0.5)$（B）$1-\Phi(1)$（C）$1-\Phi(1.5)$（D）$1-\Phi(2)$

【答案】选（B）

【分析】本题考察假设检验的基本概念，需要考生全面复习知识点。

【解析】犯第二类错误的概率即为当H_0为假时接受H_0的概率，所以只要计算当μ=11.5时，$\bar{X}$没有落入拒绝域的概率，因为$X_1,X_2,\cdots,X_{16}\sim N(11.5,4)$，所以，

$\overline{X} \sim N(11.5, \frac{4}{16}) = N(11.5, \frac{1}{4})$

则 $P(\overline{X} < 11) = P(\frac{\overline{X}-11.5}{1/2} < \frac{11-11.5}{1/2}) = P(\frac{\overline{X}-11.5}{1/2} < -1) = \Phi(-1) = 1-\Phi(1)$

所以选（B）.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

11. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【分析】本题考察反常积分的基本计算，属于基础计算题型。

【解析】

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} =$

【答案】$\frac{2}{3}$

【分析】本题考察参数方程的求导，属于基础计算题型。

【解析】$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4te^t + 4e^t - 4e^t + 2t}{2e^t + 1} = \frac{2t(1+2e^t)}{2e^t+1} = 2t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d2t}{dx} = 2\frac{1}{dx/dt} = \frac{2}{2e^t+1} = \frac{2}{3}.$$

13. 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 的解为 $y =$

【答案】$y = x^2$

【分析】本题考察二阶微分方程中的欧拉方程，属于常规题型中的偏僻考点。

【解析】令 $x = e^t$，则 $y' = \frac{dy}{dt}e^{-t}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}$ 代入有

$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4y = 0$，即 $\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0$.故 $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}$，从而有

$y(x)=C_1\frac{1}{x^2}+C_2x^2$，又 $y(1)=1,y'(1)=2$，故 $\begin{cases}C_1+C_2=1\\-C_1+C_2=1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}$，综上特解为 $y=x^2$.

14. 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\le 4,0\le z\le 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$

【答案】4π

【分析】本题考察二型曲面积分，需要考生熟练使用高斯公式。

【解析】

$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dxdz+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dxdydz$，其中 Ω 即为空间区域.

又因为 Ω 关于 xoz,yoz 面对称，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz=\int_0^2dz\iint\limits_{D(z)}dxdy=4\pi.$$

15. 设 $A=a_{(ij)}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$

【答案】$\frac{3}{2}$

【分析】本题考察伴随矩阵的定义，特征值的定义，需要考生有一定的综合分析能力。

【解析】因为 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$，又 A 的每行元素之和为 2，即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$，所以

$$A^*A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A^*\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow|A|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{3}{2}.$$

16. 甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球，选取甲盒中任意一球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数，则 X 与 Y 的相关系数为

【答案】$\frac{1}{5}$

【分析】本题考察二维离散型随机变量以及相关系数的基本概念。

【解析】由题可知: (X,Y) 的联合分布律

Y \ X	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

由此可得 $EXY=\frac{3}{10}$， $EX=EY=\frac{1}{2}$， $\text{cov}(X,Y)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$， $EX^2=\frac{1}{2}$， $EY^2=\frac{1}{2}$

则 $DX=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$， $DY=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$， $\rho_{XY}=\frac{1}{5}$.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17. （本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】本题考查未定式极限的基本计算，需要考生熟练变限积分的求导公式。

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$ （2 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$$ （4 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)+1-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$$ （7 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}e^{x^2}$$ （9 分）

$$=\frac{1}{2}$$ （10 分）

18. （本题满分 12 分）

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\ldots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】（1）收敛域为 $(0,1]$；（2）$S(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x, & 0<x<1\\ \dfrac{e^{-1}}{1-e^{-1}}+1 & x=1\end{cases}$

【分析】本题考察幂级数的收敛域以及其和函数，需要考生有综合分析能力。

【解析】$u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$

（1）设 $v_n(x)=e^{-nx}$，$w_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则 $u_n(x)=v_n(x)+w_n(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 收敛区间为 $(0,+\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛区间为 $(-1,1)$（3 分）

$x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$，级数发散

$x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$，级数收敛

所以级数的收敛域为 $(0,1]$.（4 分）

（2）$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-x}[1-e^{-nx}]}{1-e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}(x>0)$（6 分）

$S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

则 $S_2''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}(x\neq1)$

$S_2'(x)-S_2'(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt=-\ln|1-x|$，因为 $S_2'(0)=0$，所以 $S_2'(x)=-\ln|1-x|(x\neq1)$

$S_2(x)-S_2(0)=\int_0^x-\ln|1-t|dt=(1-x)\ln|1-x|+x$，因为 $S_2(0)=0$，所以 $S_2(x)=(1-x)\ln|1-x|+x(x\neq1)$（9 分）

因此 $x\neq1$ 时，$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x$

当 $x=1$ 时，和函数连续，所以 $S(1)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x\right)=\dfrac{e^{-1}}{1-e^{-1}}+1$

所以，$S(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln|1-x|+x, & 0<x<1\\ \dfrac{e^{-1}}{1-e^{-1}}+1 & x=1\end{cases}$ （12 分）

19. （本题满分 12 分）

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

【答案】距离的最大值为 66

【分析】本题考察条件极值，考生要熟练拉格朗日乘数法解方程。

【解析】根据题意，目标函数为 $f(x,y,z)=z^2$，约束条件是 $x^2+2y^2-z-6=0$ 以及 $4x+2y+z-30=0$（2 分）

设 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$

$$\begin{cases}F_x'=2\lambda x+4\mu=0\\F_y'=4\lambda y+2\mu=0\\F_z'=2z-\lambda+\mu=0\\F_\lambda'=x^2+2y^2-z-6=0\\F_\mu'=4x+2y+z-30=0\end{cases}$$ （6 分）

解得 $(x,y,z)=(4,1,12)$ 或者 $(x,y,z)=(-8,-2,66)$（10 分）

$f(4,1,12)=12^2$， $f(-8,-2,66)=66^2$

因此距离的最大值为 66（12 分）

20. （本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通区域，$I(D)=\iint\limits_D\left(4-x^2-y^2\right)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1

(1) 求 $I(D_1)$ 的值.

(2) 计算 $\int\limits_{\partial_{D_1}}\dfrac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂_{D_1} 是 D_1 的正向边界

【答案】（1） 8π；（2） π

【分析】本题考察二重积分的计算以及第二型曲线积分，需要考生有一定的综合分析能力，并熟练格林的运用。

【解析】（1）根据题意，易知 $D_1=\left\{x^2+y^2\leqslant 4\right\}$

$$\iint\limits_{D_1}4-x^2-y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=8\pi$$ （4 分）

（2）$\int_{\partial_{D_1}} \frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$

$P(x,y)=\frac{xe^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2},Q(x,y)=\frac{4ye^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{8xye^{x^2+4y^2}(x^2+4y^2-1)+x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

补充曲线$l_1:x^2+4y^2=\varepsilon^2$（顺时针方向）

$$\int_{\partial_{D_1}} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=\oint_{\partial_{D_1}+l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}-\oint_{l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

由格林公式可知，

$$\oint_{\partial_{D_1}+l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}=\iint_{D_2} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=0$$

其中D_2为∂_{D_1}和l_1围成的封闭区域.（8 分）

$$\oint_{l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l_1}(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy$$

根据格林公式

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l_1}(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_3}2dxdy=-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\varepsilon=-\pi$$

其中D_3是l_1围成的封闭区域.

所以$\int_{\partial_{D_1}} \frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\pi$（12 分）

21. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

（1） 求正交矩阵P,使P^TAP为对角矩阵

（2） 求正定矩阵C,使$C^2=(a+3)E-A$,E为3阶单位矩阵.

【答案】（1）$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$；（2）$C=\begin{pmatrix}\frac53 & -\frac13 & \frac13\\ -\frac13 & \frac53 & \frac13\\ \frac13 & \frac13 & \frac53\end{pmatrix}$

【分析】本题考察正交对角化及其应用，计算量答，需要考生有较好的计算能力；第二问技巧性较强，需要考生有一定的综合分析能力。

【解析】（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)$

令$|\lambda E-A|=0$，解得$\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2$（2分）

$(a-1)E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(a+2)E-A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$（4分）

将α_1,α_2进行施密特正交化可得$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta,\beta_1)}\beta_1=\frac12\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$（6分）

将$(\beta_1,\beta_2,\alpha_3)$单位化，可得$\gamma_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$,

可得正交矩阵$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，使$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a+2\end{pmatrix}$（8分）

(2)因为 $P^TAP=\Lambda$ 可知 $A=P\Lambda P^T$，

$$C^2=(a+3)E-A=P\left[(a+3)E-\Lambda\right]P^T=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^TP\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T$$

因为C为正定矩阵，所以

$$C=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac53&-\frac13&\frac13\\-\frac13&\frac53&\frac13\\\frac13&\frac13&\frac53\end{pmatrix}\text{（12 分）}$$

22. 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点,将该区间分成两段,较短一段的长度记为 X ,较长一段的长度记为 Y .令 $Z=\frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;(2)求 Z 的概率密度;(3)求 $E(\frac{X}{Y})$.

【答案】（1） $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$ （2） $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z..1\\0, & \text{其他}\end{cases}$

（3） $2\ln2-1$

【分析】本题考察一维均匀分布以及随机变量函数的分布，需要考生具有一定的综合分析能力。

【解析】易知 $X+Y=2,Y>X>0$,且 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布;

（Ⅰ） X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$. (4 分)

（Ⅱ） Z 的分布函数:$F(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}$

$z<1$时, $F_Z(z)=0$; $z..1$时, $F_Z(z)=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1dx=1-\frac{2}{z+1}$;

Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z..1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.　　(8 分)

(III) $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^1(\dfrac{2}{2-x}-1)\mathrm{d}x$

$=-2\ln|2-x|\Big|_0^1-1=2\ln 2-1$　　(12 分)

2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学二）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

23. $\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$ 是 x^7 的

（A）低阶无穷小（B）等价阶无穷小（C）高阶无穷小（D）同阶但非等价无穷小

【分析】本题考查无穷小阶的判定，考生需熟练掌握常见的等价无穷小公式以及变限积分求导。

【答案】（C）

【解析】

作商取极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{(x^2)^3}-1)\cdot 2x}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^7}{x^6}=0$,故高阶.

24. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取得极大值（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数为零（D）可导且导数不为零

【分析】本题考查连续、可导的判定，考生需熟练掌握连续、可导的定义式，以及极值存在的充分条件.

【答案】（D）

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，即该函数在 $x=0$ 处连续。

由导函数极限存在定理得：$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x+1}{x^2}$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

故该函数可导，且导数不为零.

25. 有一圆柱体，底面半径与高随时间的变化率分别为$2cm/s$，$-3cm/s$，当底面半径为$10cm$，高为$5cm$时，圆体的体积与表面积随时间的变化速率为

（A）$125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$（B）$125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

（C）$-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$（D）$-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

【分析】本题考查导数的物理应用，考生需要熟练掌握基本的求导公式、圆柱体的体积、表面积公式。

【答案】（C）

【解析】因$V=\pi r^2 h, S=2\pi rh+2\pi r^2$，且$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-3$. 所以当$r=10, h=5$时，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi\left(2rh\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+r^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)=-100\pi, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi\left(h\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+r\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+2r\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)=40\pi.$$

【典型错误】计算圆柱体的表面积时，容易忽略上、下底面的面积.

26. 函数$f(x)=ax-b\ln x(a>0)$有 2 个零点，则$\frac{b}{a}$的取值范围是

（A）$(\mathrm{e},+\infty)$（B）$(0,\mathrm{e})$（C）$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$（D）$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

【分析】本题考查函数零点的个数，需结合函数的单调性以及极值.

【答案】（A）

【解析】设$f(x)=ax-b\ln x$,则由$f'(x)=a-\frac{b}{x}=0$,得$x=\frac{b}{a}$,

所以$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)>0, \lim\limits_{x\to\infty}f(x)>0$只需$f(\frac{b}{a})<0$,即$f(\frac{b}{a})=b-b\ln\frac{b}{a}<0$,

所以$\ln\frac{b}{a}>1$，故$\frac{b}{a}>\mathrm{e}$.

27. 设函数$f(x)=\sec x$在$x=0$处的 2 次泰勒多项式为$1+ax+bx^2$，则

（A）$a=1, b=-\frac{1}{2}$（B）$a=1, b=\frac{1}{2}$（C）$a=0, b=-\frac{1}{2}$（D）$a=0, b=\frac{1}{2}$

【分析】本题考查在$x=0$处的泰勒展开式，考生需熟练掌握常用的泰勒展开式.

【答案】（D）

【解析】当$x\to0$时，$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，故$f(x)=\frac{1}{\cos x}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

所以，$a=0, b=\frac{1}{2}$.

28. 设函数$f(x,y)$可微，且$f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$\mathrm{d}f(1,1)=$（）

（A）$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ （B）$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

（C）$\mathrm{d}y$（D）$-\mathrm{d}y$

【分析】本题考查多元函数求偏导，并且是复合函数中的抽象函数求偏导，考生需熟练掌握利用链式法求复合函数的偏导数.

【答案】（C）

【解析】已知条件的两式均对 x 求导，

$f_1'\left(x+1,\mathrm{e}^x\right)+f_2'\left(x+1,\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x=2x(x+1)+(x+1)^2$ ①；

$f_1'\left(x,x^2\right)+f_2'\left(x,x^2\right)2x=4x\ln x+2x$ ②

①中令 $x=0$，得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$；②中令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$

联立得，$f_1'(1,1)=0,\ ,f_2'(1,1)=1$

故 $\mathrm{d}f(1,1)=f_1'(1,1)\mathrm{d}x+f_2'(1,1)\mathrm{d}y=\mathrm{d}y$.

29. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$ （B）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$ （D）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

【分析】本题考查数列求和求极限，并结合定积分定义.

【答案】（B）

【解析】用特值法，令 $f(x)=1$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，

选项（A），$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{2k-1}{2n})\dfrac{1}{2n}=n\cdot\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}$，排除；同理，选项（B）为 $n\cdot\dfrac{1}{n}=1$；

选项（C）为 $2n\cdot\dfrac{1}{n}=2$，排除；选项（D）为 $2n\cdot\dfrac{2}{n}=4$ 排除；所以选择（B）.

或者，将区间 $[0,1]$ n 等分，每一块长度均为 $\dfrac{1}{n}$，其中第 k 块小区间为 $\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$，取区间的中点为 $\xi_k=\dfrac{2k-1}{2n}$，

由定义积分定义可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，故选 B。

A 选项 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$， C 选项 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

D 选项 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

30. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

（A） 2，0 （B）1，1 （C）2，1 （D）1，2

【分析】本题考查二次型的正负惯性指数，考生需熟练掌握如何判定可逆的线性变换，并求二次型的标准形.

【答案】（B）

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^{\ 2}+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，从而二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求其特征值

$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda=0$，特征值分别为 $0,-1,3$，故正负惯性指数分别为 1，1.

【典型错误】将原题看成已经完成配方的标准形，未判定是否为可逆的线性变换.

31. 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示，则

（A） $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解（B） $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 的解

（C） $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解（D） $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解

【分析】本题考查向量组的线性表示，方程组解的关系，考生需熟练掌握线性表示对应的方程组形式、秩的关系.

【答案】（D）

【解析】因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示，所以存在三阶矩阵 P，使得 $A=BP$，故 $A^T=P^TB^T$，若存在向量 α，使得 $B^T\alpha=0$ 成立，那么，$A^T\alpha=P^TB^T\alpha=0$，所以，$B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解.

32. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，则 P、Q 分别取

（A） $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ （B） $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【分析】本题考查初等矩阵的应用：左行右列，结合矩阵乘法运算.

【答案】（C）

【解析】初等矩阵的作用，："行左列右"，即对 A 作行变换就左乘，作了相同行变换的初等矩阵。对 A 作列变换就右乘，作了相同列变换的初等矩阵.

解法：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+3C_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+C_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+3C_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+C_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故答案选 C.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

11. $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$____________.

【分析】本题考查反常积分的计算，结合定积分的凑微分法，考生需熟练掌握常用的凑微分公式.

【解析】$\int_0^{+\infty} x3^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}3^{-x^2}dx^2=\frac{-1}{2}\cdot 3^{-x^2}\frac{1}{\ln 3}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{2\ln 3}$，该反常积分收敛，所以

$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}dx=\frac{1}{\ln 3}$.

12 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1 \\ y=4(t-1)e^t+t^2 \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=0}=$ ________.

【分析】本题考查参数方程求导，考生需熟练掌握参数方程求一阶导、二阶导.

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{4e^t+4(t-1)e^t+2t}{2e^t+1}=\frac{4te^t+2t}{2e^t+1}=2t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(2t\right)/dt}{dx/dt}=\frac{2}{\left(2e^t+1\right)}\bigg|_{t=0}=\frac{2}{3}$$

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,2)}=$ ________.

【分析】本题考查多元函数求偏导，考生需熟练掌握隐函数求导法则.

【解析】由题可知 $z(0,2)=1$，由隐函数的求导法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,2)}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{z-\frac{2y}{1+4x^2y^2}}{(x+1)+\frac{y}{z}-0}\Bigg|_{(0,2)}=1$$

14.已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}dy$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ________.

【分析】本题考查变限积分求导，结合二重积分交换积分次序，定积分计算.
【解析】由于二重积分中 x,y 的积分限均包含变量 t，由此交换积分次序可得

$$f(t)=\int_1^t dy\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}dx$$

所以根据二重积分求导有 $f'(t)=\int_1^{t^2}\sin\frac{x}{t}dx$，即：

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_1^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\frac{2}{\pi}xdx=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{2x}{\pi}\bigg|_1^{\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$$

15. 求解微分方程 $y'''-y=0$ 的通解________

【分析】本题考查高阶常系数齐次线性微分方程求解，考生需熟练掌握常系数齐次线性方程的通解结构.

【解析】特征方程为$\lambda^3-1=0$，即$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$

解得$\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

故通解为$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

16.求多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^3$项前的系数____________

【分析】本题考查行列式的定义，结合列标排列的逆序数，属于基本题型.

【解析】由定义可知$(-1)^{\tau(2134)}x\cdot1\cdot x\cdot x+(-1)^{\tau(4231)}2x\cdot x\cdot x\cdot2=-5x^3$，及答案为$-5$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17\. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【分析】本题考查函数极限的计算，结合变限积分求导，考生需熟练掌握常用的等价无穷小公式、极限的四则运算.

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$（2 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$（4 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+o(x^2)+1-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$（7 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}$（9 分）

$=\dfrac{1}{2}$（10 分）

18\. 设函数$f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求函数$f(x)$的凹凸性及渐近线.

【分析】本题考查导数的应用：凹凸性和渐近线，考生需熟练掌握曲线凹凸性的判定，以及渐近线的求解步骤.

【解析】$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases}$，$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x<0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x>0\end{cases}$.（4 分）

凹区间：$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$；凸区间：$(-1,0)$（6 分）

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，垂直渐近线：$x=-1$.（7 分）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(1+x)}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-x^2}{1+x}=-1$,（9 分）

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{x(1+x)}=-1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x+x^2}{1+x}=1$,（11 分）

斜渐近线：$y=x-1$ 和 $y=-x+1$.（12 分）

19. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+c$，$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\le x\le 9)$. 记 L 的长度为 s，L 绕 x 轴旋转的旋转曲面的面积为 A，求 s 和 A.

【分析】本题考查定积分的几何应用：弧长和旋转体的侧表面积，结合定积分的计算，考生需熟练掌握弧微分、旋转体的侧表面积的公式.

【解析】等式左右两边对 x 求导，$\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}x-1$，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$（2 分）

长度 $s=\int_4^9\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_4^9\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_4^9\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx$（5 分）

$=\int_4^9\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_4^9=\dfrac{22}{3}$.（7 分）

面积 $A=\int_4^9 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_4^9 2\pi\left(\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$（10 分）

$=\pi\int_4^9\left(\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+1\right)dx=\pi\left(\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x^2+x\right)\Big|_4^9=\dfrac{425}{9}\pi$.（12 分）

【典型错误】弧微分中的根号计算式需重新配方，才能去掉根号，简化定积分的计算.

20. $y=y(x)(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$ 的解.

（1）求 $y(x)$；

（2）设 p 为曲线 $y(x)$ 上的一点，记 p 处法线在 y 轴上的截距为 I_p. I_p 最小时，求 p 的坐标.

【分析】本题考查常微分方程和导数的应用，考生需熟练掌握一阶微分方程的判定和求解，法线方程的表达式以及最值问题.

【解析】（1）求解微分方程：$y'-\frac{6}{x}y=-\frac{6}{x}$，（1 分）

则：$y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left[\int-\frac{6}{x}e^{\int-\frac{6}{x}dx}dx+C\right]=x^6\left[\int-\frac{6}{x}x^{-6}dx+C\right]=Cx^6+1$，（4 分）

且 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$，故：$y(x)=\frac{1}{3}x^6+1$，$(x>0)$.（6 分）

（2）设 p 点的坐标为：(x,y)，法线：$Y-y=-\frac{1}{y'(x)}(X-x)$，

过 p 点的法线方程为：$Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x)$，（8 分）

$X=0$ 时，y 轴上的截距：$I_p=Y=\frac{1}{2x^4}+y=\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}x^6+1$，（9 分）

令 $I_p'=-\frac{2}{x^5}+2x^5=0$，得驻点：$x=1$，唯一的极值点为最值点，（11 分）

则 I_p 最小时，p 的坐标为 $(1,\frac{4}{3})$.（12 分）

21. 设 D 由曲线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2\left(x\ge0,y\ge0\right)$ 与 x 轴围城，求 $\iint\limits_D xydxdy$.

【分析】本题考查二重积分的计算，结合极坐标方程.

【解析】$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r^3dr$（6 分）

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta\cdot\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin2\theta\cdot\cos^2 2\theta d\theta \text{（9 分）}$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\cos2\theta=-\frac{1}{48}\cos^3 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}. \text{（12 分）}$$

【典型错误】双扭线中 θ 只能取到 $\frac{\pi}{4}$.

22. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同特征值，若 A 相似于对角矩阵. 求 a,b.求逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【分析】本题考查相似对角化的判定和求解.

【解析】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)\left[(\lambda-2)^2-1\right]=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$（2 分）

（1）当 $b=1$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$，$A$ 相似于对角矩阵，则 $r(E-A)=1$，$a=1$（4 分）

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.（7 分）

（2）当 $b=3$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$，$A$ 相似于对角矩阵，则 $r(3E-A)=1$，$a=-1$（9 分）

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$.（12 分）

2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学三）

一、选择题

（1）$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$ 是 x^7 的

（A）低阶无穷小（B）等价阶无穷小（C）高阶无穷小（D）同阶但非等价无穷小

答案:C

分析:本题考查无穷小阶的判定，考生需要熟练掌握常见的等价无穷小公式；并且掌握变限积分求导.

解法: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{(x^2)^3}-1)\cdot 2x}{7x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^7}{7x^6}=0$.

（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 1\quad, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取得极大值（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数为零（D）可导且导数不为零

答案:D

分析:本题考查连续、可导的判定，考生需熟练掌握连续、可导的定义式，以及极值存在的充分条件.

解法: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

（3）函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$（B）$(0,e)$（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

答案:A

分析:本题考查函数零点的个数，需结合函数的单调性以及极值.

解法:从选项知道 $b>0$;又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,因此其唯一的极值应小于零.

令 $f'(x)=a-\dfrac{b}{x}=0$,得 $x=\dfrac{b}{a}$,则 $f(\dfrac{b}{a})=b-b\ln\dfrac{b}{a}>0,\dfrac{b}{a}>$ e.

（4）设函数 $f(u,v)$ 可微且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$（B）$dx-dy$（C）dy（D）$-dy$

答案:C

分析:本题考查多元函数求偏导，并且是复合函数中的抽象函数求偏导，考生需熟练掌握利用链式法求复合函数的偏导数.

解法:已知条件的两式均对 x 求导，

$$f_1'\left(x+1,\mathrm{e}^x\right)+f_2'\left(x+1,\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x=2x(x+1)+(x+1)^2 \text{①};$$

$$f_1'\left(x,x^2\right)+f_2'\left(x,x^2\right)2x=4x\ln x+2x \text{②}$$

①中令 $x=0$，得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$；②中令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$

联立得，$f_1'(1,1)=0,\ ,f_2'(1,1)=1$

故 $\mathrm{d}f(1,1)=f_1'(1,1)\mathrm{d}x+f_2'(1,1)\mathrm{d}y=\mathrm{d}y$.

方法二:如果能把函数的表达式表示出来,就更好操作了:

由 $f(x+1,e^x)=(x+1)^2\ln e^x,\ f(x,x^2)=x^2\ln x^2$ 可知 $f(x,y)=x^2\ln y$;

因此 $f_x'(1,0)=2x\ln y\big|_{(1,0)}=0,\ f_y'(1,0)=\dfrac{x^2}{y}\Big|_{(1,0)}=1$,

$$\mathrm{d}f(1,1)=0\mathrm{d}x+1\mathrm{d}y=\mathrm{d}y.$$

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

（A） 2，0 （B）1，1 （C）2，1 （D）1，2

答案:B

分析:本题考查二次型的正负惯性指数，考生需熟练掌握如何判定可逆的线性变换，并求二次型的标准形.

解法: $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{x_3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(x_2+x_3\right)^2$,系数一正一负(另一个为零),即正负惯性指数都为1.

（6）设 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$ 为4阶正交矩阵,若矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \alpha_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 表示任意常数,则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=$

（A） $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_1$ （B） $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_2$

（C） $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+k\alpha_3$ （D） $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$

答案:D

分析:考查正交矩阵的性质,另外需要掌握方程的解的结构.

解法:易知 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\begin{cases}0,i\neq j,\\1,i=j;\end{cases}$ 且 $\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\right)$ 线性无关.因此 $r(B)=3$.

$\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\alpha_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\alpha_4=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_4\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_4\\\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$,即 α_4 是齐次方程的解;

$\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\alpha_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2+\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_3\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_3\\\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_2+\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,即 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 是非齐次方程的解.

（7）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，则 P 、Q 分别取

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

答案:C

分析:此题涉及矩阵的标准形,考纲并不涉及这个知识点,因此可采取特值法.

解法:将选项代入,C 选项成立:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

（8）设 A,B 为随机事件,且 $0<P(B)<1$,下列命题中为假命题的是

（A）若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

（B）若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

（C）若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

（D）若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

答案:D

分析:本题考察条件概率的基本公式，需要考生具有一定的化简能力。

解析:D 选项错误:

$$P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)\Leftrightarrow\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}>\frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A}A\cup\overline{A}B)}{P(A\cup B)}$$

$$\Leftrightarrow P(A) > P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB),$$

即 $P(A)+P(AB) > P(B)$,不能推 $P(A) > P(B)$.

（9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则

（A）$E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ （B）$E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（C）$E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ （D）$E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

答案:B

分析:本题考查期望和方差的性质,涉及多个随机变量及独立性

解法: $E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=E\left(\overline{X}\right)-E\left(\overline{Y}\right)=\mu_1-\mu_2=\theta$

$$D\left(\hat{\theta}\right)=D\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=D\left(\overline{X}\right)+D\left(\overline{Y}\right)-2COV\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-2\frac{1}{n^2}COV\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)$$

$$=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-2\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}COV\left(X_i,Y_i\right)$$

$$=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-2\frac{1}{n^2}n\left(X_i,Y_i\right)$$

$$=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n}\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

（10）总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$,利用来自总体 X 的样本观察值 $1,3,2,2,1,3,1,2$ 可得 θ 的最大似然估计值为

（A）$\frac{1}{4}$ （B）$\frac{3}{8}$ （C）$\frac{1}{2}$ （D）$\frac{5}{8}$

答案:A

分析:考查似然估计,属于常规考题.

解法:似然函数 $L(\theta)=(\frac{1-\theta}{2})^3\cdot(\frac{1+\theta}{4})^5$，则取对数得：

$\ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta)-13\ln 2;\frac{d}{d\theta}(\ln L(\theta))=\frac{3}{1-\theta}+\frac{5}{1+\theta}=0,$

解得 $\theta=\frac{1}{4}$.

二、填空题

（11）若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ____________.

答案: $\frac{\sin e^{-1}}{2e}$

分析:本题主要考查复合函数的导数,多次复合即可.

解法: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=-\sin\left(e^{-\sqrt{x}}\right)\left(e^{-\sqrt{x}}\right)\left.\left(\frac{1}{-2\sqrt{x}}\right)\right|_{x=1}=\frac{\sin \mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{e}}$.

（12）$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$ __________.

答案: 6

分析:本题首要解决的问题是去掉绝对值,因此需要将区间分开,然后掌握第一换元法即可.

解法: $\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x=-\sqrt{9-x^2}\Big|_{\sqrt{5}}^{3}+\sqrt{x^2-9}\Big|_{3}^{5}=6$.

（13）设D由 $y=\sqrt{x}\sin\pi x\left(0\le x\le 1\right)$与$x$轴围成，则$D$绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为_______.

答案: $\frac{\pi}{4}$

分析:旋转体的体积,属于常规题,计算不出错即可.

解法: $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\sin\pi x\right)^2\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^1 x\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x \text{ 令} t=\pi x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi^2}t\sin^2 t dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin^2 t dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt=\frac{\pi}{4}$$

（14）差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为_________.

答案: $\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$

分析:常规知识点的考查,差分方程属于数三的专属内容.虽然考频不高,但一定要复习到.

解法:对应齐次方程 $y_{t+1}-y_t=0$ 的特征根 $\lambda-1=0,\lambda=1$,因此齐次方程的通解为 $y_t=C$;

设非齐次方程的特解为 $y_t^*=t(at+b)$,则有 $(t+1)(at+a+b)-t(at+b)=t$,解得

$$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2};$$

因此原方程的通解为 $y_t=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$.

（15）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为.

答案: -5

分析:本题考查的是行列式的定义,涉及到逆序数,属于容易忽略的考点,提醒考生掌握基础知识.

解法:

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & \underline{2x} \\ 1 & \underline{x} & 2 & -1 \\ 2 & 1 & \underline{x} & 1 \\ \underline{2} & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

生成$4x^3$,逆序数τ（4,2,3,1）= 5.改为$-4x^3$

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & \underline{x} & 1 & 2x \\ \underline{1} & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & \underline{x} & 1 \\ \underline{2} & -1 & 1 & \underline{x} \end{vmatrix}$$

生成x^3,逆序数τ（2,1,3,4）= 1.改为$-x^3$,最后为$-5x^3$

（16）甲乙中各装 2 红 2 白球，从甲盆中任取一球，观察颜色放入乙盆，再从乙盆中任取一球，令 X，Y 分别从甲乙两盆中取得红球的个数，则 $\rho_{XY}=$ ________.

答案: $\frac{1}{5}$

分析:本题考察二维离散型随机变量以及相关系数的基本概念.

解法:经过计算 X,Y 服从同一分布: $P\{X=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$;

又 $P\{XY=1\}=\frac{3}{10}, P\{XY=0\}=\frac{7}{10}$,所以

$$\rho=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DXDY}}=\frac{\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题

（17）已知 $\lim\limits_{x\to 0}[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在,求 a 的值.

分析:涉及左右极限的求法,掌握相关的特殊函数的左右极限即可.

解法: $\lim\limits_{x\to 0^+}[a\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-}[a\arctan\frac{1}{x}+(1-x)^{-\frac{1}{x}}]=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$;

则其左极限等于右极限: $\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$,解得

$a=\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{\pi}$.

（18）求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

分析:二元函数的极值,属于常规题,但计算非常琐碎,希望考生加强计算的训练.
解法:

令$\begin{cases} f_x'(x,y)=\frac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0, \\ f_y'(x,y)=\frac{y}{x^2}=0, \end{cases}$ 得驻点 $(-1,0)$ 和 $(\frac{1}{2},0)$.

$$\begin{cases} f_{xx}''(x,y)=\frac{-2x^2-2x+3+3y^2}{x^4}, \\ f_{yx}''(x,y)=-\frac{2y}{x^3}, \\ f_{yy}''(x,y)=\frac{1}{x^2}, \end{cases}$$

在 $(-1,0)$ 处, $A=3>0,B=0,C=1>0,AC-B^2>0$，所以有

极小值 $f(-1,0)=2$;

在 $(\frac{1}{2},0)$ 处, $A=24>0,B=0,C=4>0,AC-B^2>0$，所以有

极小值 $f(\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}-2\ln 2$.

（19）设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分,计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

分析:二重积分的常规考题,但直角坐标系转化为极坐标系后再交换积分次序,这种操作不常见,稍微注意即可.

解法:

$$\iint_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta}(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{r^2(1+\sin2\theta)}r^3\cos2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1\frac{r}{2}e^{r^2(1+\sin2\theta)}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^1 r(e^{2r^2}-e^{r^2})\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}e^{2r^2}-\frac{1}{2}e^{r^2})\Big|_0^1=\frac{1}{8}(e-1)^2$$

（20）设 n 为正整数, $y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.(1)求 $y_n(x)$;(2)求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

分析:第(1)问涉及可分离变量的微分方程,属常规考题;解决了第(1)问,第二问也就属于常规的求级数的和函数了.当然,两者结合起来,自然会增加难度.

解法:（Ⅰ） $xy'-(n+1)y=0$,化简得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=(n+1)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分，得 $\ln|y|=(n+1)\ln|x|+C_0$，

化简得 $y=Cx^{n+1}$.

$\because y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$, $\therefore C=\dfrac{1}{n(n+1)}$, $\therefore y_n(x)=\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

（Ⅱ）令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}}{\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}}\right|<1$，得 $-1<x<1$.

$x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛；$x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛；收敛域为 $[-1,1]$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'\mathrm{d}x-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\mathrm{d}x$$

$$=x\int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x-\int_0^x \frac{x}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=(1-x)\ln(1-x)+x \qquad x\in[-1,1)$$

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-}[(1-x)\ln(1-x)+x]=1$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x), -1,, x<1 \\ 1, \qquad\qquad\qquad\qquad x=1 \end{cases}.$$

（21）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同特征值，若 A 相似于对角矩阵.求 a,b.求逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

分析:本题考查相似对角化的判定和求解.

解法:

$|A-\lambda E|=(b-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$,

因为矩阵仅有两个不同的特征值，故 $b=1$ 或 $b=3$.

当 $b=1$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$，

因为 A 相似与对角矩阵，故 $r(A-E)=1\Rightarrow a=1$，

解 $(A-E)x=O$ 得 $\alpha_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，解 $(A-3E)x=O$ 得 $\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

令 $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$；

当 $b=3$ 时，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=3$，

因为 A 相似与对角矩阵，故 $r(A-E)=1\Rightarrow a=\text{-}1$，

解 $(A-E)x=O$ 得 $\beta_1=\begin{bmatrix} \text{-}1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，解 $(A-3E)x=O$ 得 $\beta_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

令 $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$.

（22）在区间 $(0,2)$ 上随机取一点,将该区间分成两段,较短一段的长度记为 X ,较长一段的长度记为 X .令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度;(2)求 Z 的概率密度;(3)求 $E(\frac{X}{Y})$.

分析:本题考察一维均匀分布以及随机变量函数的分布，需要考生具有一定的综合分析能力.

解法:易知 $X+Y=2, Y>X>0$,且 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布;

（Ⅰ）X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（Ⅱ）Z 的分布函数:$F(z)=P\{Z\leq z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\leq z\right\}$

$z<1$时, $F_Z(z)=0$; $z..1$时, $F_Z(z)=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1} 1dx=1-\frac{2}{z+1}$;

Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z..1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（Ⅲ）$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\frac{x}{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^1(\frac{2}{2-x}-1)\mathrm{d}x$

$$=-2\ln|2-x|\Big|_0^1-1=2\ln 2-1.$$