2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学一）

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17. （本题满分10分）

求极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

【解】

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)-(e^x-1)}{\sin x\ \ (e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)-(e^x-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)+e^x\sin x-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\cos x\int_0^x e^{t^2}dt+e^x\sin x+1-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\int_0^x e^{t^2}dt}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

18. （本题满分12分）

设$u(x)=e^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ (n=1,2,\dots)$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域及和函数

【解】

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=S_1(x)+S_2(x)$

当$e^{-x}<1$时，则$x>0$，此时$S_1(x)$收敛，$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}},\mathrm{x}>0$

$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,由$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+1)}}{\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}}=|x|<1$得收敛区间为$(-1,1)$，

在$x=\pm 1$时，当$n\to\infty$时，$\left|\frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}\right|\sim\frac{1}{n^2}$,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}$收敛

故$S_2(x)$的收敛域为$[-1，1]$，原级数的收敛域为$(0,1]$.

$S_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,

$S_2''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$,

$S_2'(x)=\int_0^x S_2''(t)dt+S_2'(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1+x)$,

$S_2(x) = \int_0^x S_2'(t)dt + S_2(0) = \int_0^x -\ln(1+t)\,dt = (1-x)\ln(1+x) + x, x \in (0,1)$

当$x = 1$时，$S_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = 1$

故$S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln(1+x) + x, x \in (0,1)$

$S(1) = S_1(1) + S_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{-n} + 1 = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} + 1 = \frac{e}{e-1}$,

综上所述：

$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln(1+x) + x, x \in (0,1) \\ \frac{e}{e-1} \quad , x = 1 \end{cases}$$

21. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

（1）求正交矩阵P，使P^TAP 为对角矩阵

（2）求正定矩阵C，使$C^2 = (a+3)E - A$, E 为3 阶单位矩阵.

【解】

（1）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 1)^2(\lambda - a - 2)$

令$|\lambda E - A| = 0$，解得$\lambda_1 = \lambda_2 = a - 1, \lambda_3 = a + 2$

$(\lambda_1 E - A)x = 0$，解得$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda_3 E - A)x = 0$，解得 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

施密特正交化:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

将单位化:

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

可得正交矩阵$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，使$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}a-1&0&0\\0&a-1&0\\0&0&a+2\end{pmatrix}$

(2)因为$P^TAP=\Lambda$可知$A=P^T\Lambda P$,

$$C^2=(a+3)E-A=(a+3)PP^T-PAP^T=P\big((a+3)E-A\big)P^T=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T$$

$$=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^TP\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T$$

所以$C=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-1&1\\-1&5&1\\1&1&5\end{pmatrix}$