2020~2021 学年第一学期高一年级期末考试

数学试卷

一、选择题

1. $475°$角的终边所在的象限是

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

答案：B

解析：$475°=360°+115°$，　$115°$为第二象限角

2.已知扇形半径为 $2cm$，面积为 $8cm^2$，则扇形圆心角的弧度数为

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

答案：D

解析：$\because S_{扇形}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2, \therefore 8=\frac{1}{2}|\alpha|2^2$,解得 $\alpha=4$

3.已知函数则 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0,\\ 2^{-x}, & x\le 0,\end{cases}$ 则 $f(f(-1))=$

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

答案：C

解析：$f(-1)=2^{-(-1)}=2, f(f(-1))=f(2)=\log_2 2=1$

4.为了得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图像，只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图像

A.向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　B.向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

C.向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　D.向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

答案：D

解析：$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin\left[2(x-\frac{\pi}{8})\right]$，$\therefore$可以看做 $y=\sin 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

5.已知 $a=\log_3 0.5, b=\log_{0.3} 0.5, c=\log_{0.4} 0.5,$ ，则 a,b,c 的大小关系式

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

答案： A

解析： $a<0,b>0,c>0$, 结合 $y=\log_{0.3}x, y=\log_{0.4}x$ 的图像可知 $c>b$

6.把角 α 终边逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后经过点 $P(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，则 $\cos\alpha=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：C

解析： $\because \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha=-\frac{1}{2},\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.函数 $f(x)=\log_2^x+x+2$ 的零点所在的一个区间是

A. $(0,\frac{1}{8})$　　B. $(\frac{1}{8},\frac{1}{4})$　　C. $(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$　　D. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

答案： B

解析： $\because f(\frac{1}{8})<0, f(\frac{1}{4})>0$ 且 $f(x)$ 是连续函数

8.函数 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$ 的单调递减区间是

A. $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in Z)$　　B. $[2k\pi-\frac{\pi}{12},2k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in Z)$

C. $[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in Z)$　　D. $[2k\pi+\frac{5\pi}{12},2k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in Z)$

答案： A

解析： $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\frac{\pi}{3}-2x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$

9.已知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-\frac{5}{6}x+a=0$ 的两个实数根，且 $\tan(\alpha+\beta)=1$，则 $a=$

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{11}{6}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{7}{12}$

答案： A

解析： $\because \tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{6},\tan\alpha\tan\beta=a$　$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1\ \therefore a=\frac{1}{6}$

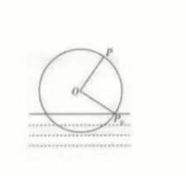
10.已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),2\sin2\alpha-\cos2\alpha=1$，则 $\cos\alpha=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

答案：D

解析：$4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$，$\because \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})\therefore \cos\alpha\neq 0$　$\therefore 2\sin\alpha=\cos\alpha\ \therefore \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11.如图，一半径为 4.8m 的筒车按逆时针方向转动，已知筒车圆心 O 距离水面 2.4m，筒车每 60s 转动一圈，如果当筒车上点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计时，则



A.点 P 第一次到达最高点需要 $10s$

B.点 P 距离水面的高度 h(单位：m)与时间 t(单位：s)的函数解析式为 $h=4.8\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})+2.4$

C.在筒车转动的一圈内，点 P 距离水面的高度不低于 4.8m 共有 $10s$ 的时间

D.当筒车转动 50s 时，点 P 在水面下方，距离水面 $1.2m$

答案：B

解析：当 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $t=20$ 即点 P 第一次到达最高点需要 $20s$，所以 A 错；令 $4.8\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})+2.4\geq 4.8(0\leq t\leq 60)$ 解得 $10\leq t\leq 30$，即在筒车转动的一圈内，点 P 距离水面的高度不低于 4.8m 共有 20s 的时间，所有 C 错，当 $t=50s$ 时，$h=-2.4$，即点 P 在水面下方，距离水面 2.4m，即 D 错

12.已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+(2-a)x+\frac{1}{4})$ 的值域为 R，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,4)$　　B. $(1,4)\cup\{0\}$

C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $[0,1]\cup[4,+\infty)$

答案：D

解析：当 $a=0$ 时，$f(x)=\lg(2x+\frac{1}{4})$ 满足；

当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=(2-a)^2-a\geq 0 \end{cases}$ 解得 $0<a\leq 1, a\geq 4$

综上：a 的取值范围是 $[0,1]\cup[4,+\infty)$

二、填空题

13. $\cos\frac{5\pi}{3}=$____________。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

14. 已知强度为 x 的声音对应的等级为 $f(x)=10\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}$ 分贝 (dB)，则等级为 $90dB$ 的声音强度为____________。

答案：10^{-3}

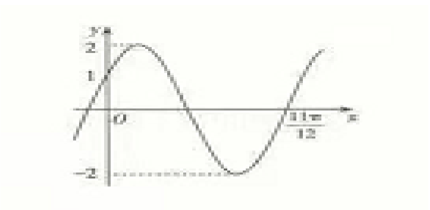
解析：由题意可得：$90=10\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}$，$\therefore 9=\lg x-\lg 1\times 10^{-12}$，$\lg x=-3$，$x=10^{-3}$

15.已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则 $2\alpha-\beta=$

答案：$\frac{\pi}{2}$

解析：由 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$ 得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，十字相乘化简可得 $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha$，即 $\alpha-\beta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha-\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$，整理得 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ 或 $-\beta=\frac{\pi}{2}$（不符合题意，舍），故 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

16.已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示，



则

①关于 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称

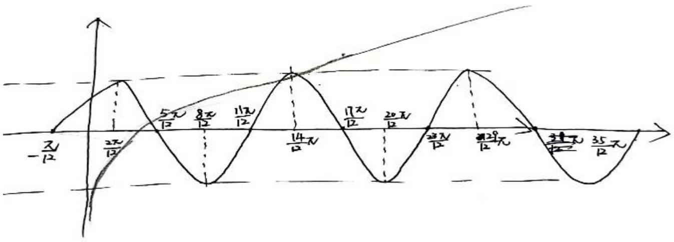
②递减区间为 $(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi)k\in Z$

③若 $f(x)=a$，则 $\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}$

④ $g(x)=f(x)-\log_2 x$ 有 4 个零点，则结论正确的序号为

答案：②③

解析：由图可知 $f(0)=1$ ，计算可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ， $A=2$ ， $\omega=2$



由图像可知①　④错误，②正确，

$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})=a$ ，则 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{a}{2}$ ，

$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}$ ，故③正确

三、解答题

17.求下列各式的值.

(1) $2\log_9 2-\log_9\frac{32}{9}+\log_9 8$ ；

(2) $\lg 5+\lg 2-(-\frac{1}{3})^{-2}+\left(\sqrt{5}-2\right)^0$.

答案：(1) 1 (2) -7

解析：解：(1) $2\log_9 2-\log_9\frac{32}{9}+\log_9 8$

$=\log_9 4-\log_9\frac{32}{9}+\log_9 8$

$=\log_9(4\div\frac{32}{9}\times 8)$

$=\log_9 9$

$=1$

(2) $\lg 5+\lg 2-(-\frac{1}{3})^{-2}+\left(\sqrt{5}-2\right)^0$

$=\lg(5\times 2)-9+1$

$=1-9+1$

$=-7$

18.(本小题 10 分)

已知 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=3$

(1) 求 $\tan\theta$ 的值

(2) 求 $\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos^2(3\pi-\theta)}{1+\sin^2(-\theta)}$ 的值

答案： $\tan\theta=-2$;原式$=\dfrac{1}{9}$

解析:(1) 由原式 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=3$,化简分子分母同时除以 $\cos\theta$ 得 $\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=3$,化简求出 $\tan\theta=-2$

(2)化简原式得:

$$\frac{\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos^2(3\pi-\theta)}{1+\sin^2(-\theta)}=\frac{-\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta}{1+(-\sin\theta)^2}=-\left(\frac{\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2}\right)$$

分子分母同除化简得,

原式 $=-\left(\dfrac{\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2}\right)=-\left(\dfrac{\tan\theta+1}{2\tan^2\theta+1}\right)$

带入第一问可得原式答案为 $\dfrac{1}{9}$

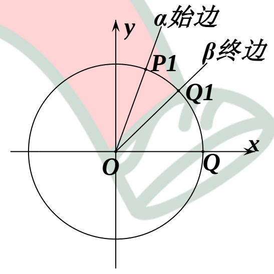
19（本小题 10 分）

如图，设单位圆与 x 轴的正半轴相交于点 $Q(1,0)$，当 $\alpha\neq 2k\pi+\beta(k\in Z)$ 时，以 x 轴非负半轴为始边作角 α,β，它们的终边分别与单位圆相交于点 $P_1(coa\alpha,\sin\alpha),Q_1(\cos\beta,\sin\beta)$.

（1）叙述并利用下图证明两角差的余弦公式；

（2）利用两角差的余弦公式与诱导公式，证明：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

（附：平面上任意两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 间的距离公式 $P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$



证明：

（1）以 x 轴非负半轴为始边作角 $\alpha-\beta$，它的终边与单位圆相交于点 $P(coa(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$,

连接 $P_1Q_1, PQ,$ 若把扇形 OPQ 绕着点 O 旋转 β 角，则点 P,Q 分别与 P_1,Q_1 重合，根据圆的旋转对称性

可知，PQ 与 P_1Q_1 重合，从而 $PQ=P_1Q_1$，所以 $PQ=P_1Q_1$,根据两点间距离公式，得

$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$,

化简得：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

（2）$\cos[\alpha-(\beta+\frac{\pi}{2})]=\cos\alpha\cos(\beta+\frac{\pi}{2})+\sin\alpha\sin(\beta+\frac{\pi}{2})=-\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha(-\cos\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 又

$\cos[\alpha-(\beta+\frac{\pi}{2})]=\cos[(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}]=\sin(\alpha-\beta)$

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

20（本题 10 分）说明：请同学们在（A）（B）两个题中任选一题作答

（A）已知函数 $f(x)=\log_2\left(\frac{k}{x+1}-1\right)$ 为奇函数．

（1）求 k 的值；

（2）求 $f(x)$ 的定义域．

答案：（1）$k=2$；（2）$(-1,1)$

解析：（1）解：$\because$ $f(x)=\log_2\left(\frac{k}{x+1}-1\right)$ 是奇函数，$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$

$\therefore$ $f(-x)+f(x)=\log_2(\frac{k-1+x}{-x+1})+\log_2(\frac{k-1-x}{x+1})=\log_2(\frac{(k-1)^2-x^2}{1-x^2})=0$

解得：$k=2$ 或 $k=0$（舍）

（2）：由（1）得，$f(x)=\log_2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$，令 $\frac{1-x}{x+1}>0$，解得：$-1<x<1$

故定义域为 $\{x|-1<x<1\}$

（B）已知函数 $f(x)=\log_2\left(\frac{k}{x+1}-1\right)$ 为奇函数

(1)求 k 的值并求 $f(x)$ 的定义域

(2)求 $f(x)$在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right)$上的值域

答案：（1）：同上题，（2）：$(-2,1)$

解析：（2）由(1)得 $f(x)=\log_2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$，因为 $f(t)=\log_2 t$为增函数，又 $t=\frac{1-x}{x+1}$，即 $t=\frac{2}{x+1}-1$在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right)$为减函数，所以 $f(x)$在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right)$上为减函数；又 $f(-\frac{1}{3})=\log_2 2=1,\ f(\frac{3}{5})=\log_2\frac{1}{4}=-2$所以 $f(x)$在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right)$上的值域为 $(-2,1)$

21.（本小题 10 分）说明：请同学们在（A）、（B）两个小题中任选一题作答。

（A）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})-2\sin x\cos x$，

（1）当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$时，求函数 $f(x)$的最大值和最小值；

（2）若不等式 $|f(x)-m|<1$在 $|x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上恒成立，求实数 m 的取值范围。

（B）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})-2\sin\omega x\cos\omega x,\omega>0$。

（1）若函数 $f(x)$的最小正周期为 π，则当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$时，求函数 $f(x)$的最大值和最小值；

（2）若 $f(x)$在区间 $(\pi,2\pi)$内没有零点，求 ω 的取值范围。

21（A）答案：（1）最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2}$（2）$(-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$

解析：（1）$\because f(x)=\sqrt{3}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6})-\sin 2x$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$

$$\because 0\le x\le\frac{\pi}{4},\therefore\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore\frac{1}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{3})\le 1,\quad f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2},\ f(\frac{\pi}{12})=1$$

即函数 $y=f(x)$在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$上的最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2}$

(2)因为不等式 $|f(x)-m|<1$在 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上恒成立，

所以不等式 $-1+m<f(x)<1+m$在 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上恒成立，

又 $f(x)$在 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上的最大值与最小值分别为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$和 $\frac{1}{2}$

所以 $m-1<-\frac{\sqrt{3}}{2},1+m>\frac{1}{2}$

解得 $-\frac{1}{2}<m<1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以实数 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$

21（B）答案：（1）最大值为1，最小值为 $\frac{1}{2}$（2）$(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},\frac{5}{12}]$

解析：（1）$\because f(x)=\sqrt{3}(\sin 2\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\omega x\sin\frac{\pi}{6})-\sin 2\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x+\frac{1}{2}\sin 2\omega x=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$

由于函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=1$。

$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

$\because 0\le x\le\frac{\pi}{4},\therefore \frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6},$

$\therefore \frac{1}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{3})\le 1$，$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{\pi}{12})=1$

即函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为1，最小值为 $\frac{1}{2}$

（2）当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{3}\in(2\omega\pi+\frac{\pi}{3},4\omega\pi+\frac{\pi}{3})$

由于 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点。

因此 $(2\omega\pi+\frac{\pi}{3},2\omega\pi+\frac{\pi}{3})\subseteq(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 或 $(2\omega\pi+\frac{\pi}{3},4\omega\pi+\frac{\pi}{3})\subseteq(2k\pi-\pi,2k\pi)$

则 $2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\ge 2k\pi$ 且 $4\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\pi$ 或 $2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\ge 2k\pi-\pi$ 且 $4\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi$

解得 $-\frac{\pi}{6}\le\omega\le\frac{1}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}\le\omega\le\frac{5}{12}$，

又 $\omega>0$，所以 ω 的取值范围为 $(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},\frac{5}{12}]$