

2020~2021 学年第一学期高二年级期末考试

数学试卷(文科)

(考试时间:上午8:00—9:30)

说明:本试卷为闭卷笔答,答题时间90分钟,满分100分。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、选择题(本题共12小题,每小题3分,共36分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请将其字母标号填入下表相应位置)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

1. 命题“若 $x=3$, 则 $|x|=3$ ”的否命题是

- A. 若 $x=3$, 则 $|x| \neq 3$
- B. 若 $x=-3$, 则 $|x|=3$
- C. 若 $x \neq 3$, 则 $|x| \neq 3$
- D. 若 $|x| \neq 3$, 则 $x \neq 3$

2. 已知 $f(x)=2^x$, 则 $f'(x)=$

- A. 2^x
- B. $x \cdot 2^{x-1}$
- C. $\frac{2^x}{\ln 2}$
- D. $2^x \cdot \ln 2$

3. 已知抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $F(1,0)$, 则 $p=$

- A. 4
- B. 2
- C. 1
- D. $\frac{1}{2}$

4. 已知命题“ $p \vee q$ ”为真命题, “ $\neg p$ ”为真命题, 则

- A. p 为假命题, q 为真命题
- B. p 为真命题, q 为真命题
- C. p 为真命题, q 为假命题
- D. p 为假命题, q 为假命题

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{1}{3}x$, 则

- A. $b = 3a$
- B. $a = 3b$
- C. $a = \sqrt{3}b$
- D. $b = \sqrt{3}a$

6. 已知函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的可导函数, 且导函数为 $f'(x)$, 则“对任意的 $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$ ”是“ $f(x)$ 在 (a,b) 上为增函数”的

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

7. 已知直线 $y = kx$ 是曲线 $y = e^x$ 的切线, 则实数 k 的值为

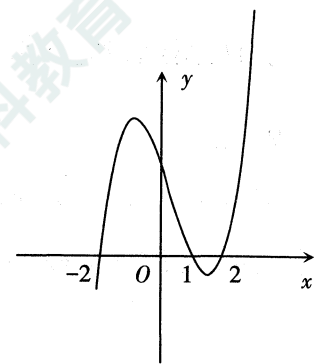
- A. $-\frac{1}{e}$
- B. $-e$
- C. $\frac{1}{e}$
- D. e

8. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2x + 3 > 0$ 是真命题, 那么实数 a 的取值范围是

- A. $a < \frac{1}{3}$
- B. $0 < a \leq \frac{1}{3}$
- C. $a > \frac{1}{3}$
- D. $a \leq \frac{1}{3}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 函数 $g(x) = (x-1)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (1, 2)$ 上为减函数
- B. $f(x)$ 在 $(-2, 1), (2, +\infty)$ 上为增函数
- C. $f(x)$ 的极小值为 $f(-2)$, 极大值为 $f(2)$
- D. $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)$, 极小值为 $f(2)$



10. 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 P 向 x 轴作垂线, 垂足恰为椭圆的左焦点 F_1 , 点 A, B 分

别为椭圆的右顶点和上顶点. 若 $OP \parallel AB$ (O 为坐标原点), 则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 已知曲线 $E: x^2 + y^2 \cos \alpha = 1 (\alpha \in [0, \pi])$, 则下列描述正确的是

- ① 当 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 时, 曲线 E 表示双曲线, 焦点在 x 轴上;
② 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 曲线 E 表示以原点为圆心, 半径为 1 的圆;
③ 当 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, 曲线 E 围成图形的面积的最小值为 π .

- A. ①② B. ①③
C. ②③ D. ①②③

12. 现有橡皮泥制作的底面半径为 4, 高为 3 的圆锥一个. 若将它重新制作成一个底面半径为 r , 高为 h 的圆柱 (橡皮泥没有浪费), 则该圆柱表面积的最小值为

- A. 20π B. 24π
C. 28π D. 32π

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案写在题中横线上)

13. 命题“存在实数 x_0 , 使得 2^{x_0} 大于 3^{x_0} ”用符号语言可表示为_____.

14. 已知双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同的焦点, 则该双曲线的标准方程为_____.

15. 函数 $y = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值 10, 则实数 $a =$ _____.

16. 已知点 A, B 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上不同于原点 O 的两点, 且 $OA \perp OB$, 则 $\triangle OAB$ 的面积的最小值为_____.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 48 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题 8 分)

已知命题 $p: 0 \leq x \leq 1$; $q: a - 1 \leq x \leq 2a (a > 0)$.

(1) 若 $a = 1$, 写出命题“若 p 则 q ”的逆否命题, 并判断真假;

(2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.



20. (本小题10分)说明:请考生在(A),(B)两个小题中任选一题作答.

(A)已知函数 $f(x) = x - 1 - \ln x$.

(1)证明: $f(x)$ 存在唯一的零点;

(2)当 $x > 0$ 时,证明: $e^x > x > \ln x$.

(B)已知函数 $f(x) = ax - 1 - \ln x$.

(1)当 $a = 1$ 时,证明: $f(x)$ 存在唯一的零点;

(2)若 $f(x) \geq 0$,求实数 a 的取值范围.

21. (本小题10分)说明:请考生在(A),(B)两个小题中任选一题作答.

(A)已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$,斜率为1的直线 l 过抛物线 C 的焦点,与抛物线 C 交于 A, B 两点,且 $|AB| = 8$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)设点 $P(-1, \frac{3}{2})$,过点 P 作直线 PM, PN 与抛物线 C 相切,切点分别为 M, N ,

证明: $PM \perp PN$.

(B)已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$,斜率为1的直线 l 过抛物线 C 的焦点,与抛物线 C 交于 A, B 两点,且 $|AB| = 8$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)设点 $P(a, b) (a < 0)$,过点 P 作直线 PM, PN 与抛物线 C 相切,切点分别为 M, N ,若 $PM \perp PN$,求 a 的值.

18. (本小题10分)

已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值与最小值.

19. (本小题10分)

已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 点 P 为圆 O 上的动点, $DP \perp x$ 轴, 垂足为 D , 若 $\overline{DM} = \frac{3}{2}\overline{DP}$, 设点 M 的轨迹为曲线 E .

- (1) 求曲线 E 的方程;
- (2) 若直线 $l: y = kx$ 与曲线 E 交于 A, B 两点, $F(0, \sqrt{5})$, 且 $\triangle AFB$ 的面积为 2, 求 k 的值.