2020-2021 学年第一学期高二年级期末考试

数学文科参考答案与评分建议

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	A	B	A	D	C	D	C	B	B

二、填空题

13、$\exists x_0 \in R, 2^{x_0} > 3^{x_0}$　　14、$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　15、 4　　16、16

三、解答题

17. （1）当 $a=1$ 时，$q:0\le x\le 2$，　　..............................1 分

逆否命题为：若 $x<0$ 或 $x>2$，则 $x<0$ 或 $x>1$.　　..............................3 分

它是一个真命题.　　..............................4 分

（2）因为 p 是 q 的充分不必要条件，

所以集合 $\{x\,|\,0\le x\le 1\}$ 是集合 $\{x\,|\,a-1\le x\le 2a\}$ 的真子集，　　..............................5 分

所以 $\begin{cases} a-1\le 0 \\ 2a\ge 1 \end{cases}$，且等号不能同时取到，　　..............................7 分

解得 $\frac{1}{2}\le a\le 1$，

所以有实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$.　　..............................8 分

18. （1）解：$f'(x)=-x^2+4x$，　　..........................1 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=4$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $0<x<4$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>4$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，　　...................4 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0),(4,+\infty)$，单调递增区间是 $(0,4)$. ....5 分

（2）由（1）知，当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(0)=1$，　　...................7 分

又 $f(-1)=\frac{10}{3}$，$f(2)=\frac{19}{3}$， ....9 分

函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 $\frac{19}{3}$，最小值为 1. ....10 分

19.（1）设点 M 的坐标为 (x,y)，点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $x=x_0$，$y=\frac{3}{2}y_0$. ....2 分

所以 $x_0=x, y_0=\frac{2}{3}y$，因为点 P 在圆上，所以 $x_0{}^2+y_0{}^2=4$.

则 $x^2+\frac{4}{9}y^2=4$，即 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$，

所以曲线 E 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$. ....5 分

（1）由 $\begin{cases} y=kx \\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $x^2=\frac{36}{4k^2+9}$， ....6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$x_1<x_2$，则 $x_1=-\sqrt{\frac{36}{4k^2+9}},x_2=\sqrt{\frac{36}{4k^2+9}}$

则 $S_{\Delta MFN}=\frac{1}{2}\times|x_2-x_1|\times\sqrt{5}=\sqrt{\frac{36}{4k^2+9}}\times\sqrt{5}=2$， ....8 分

解得 $k=\pm3$. ....10 分

20. A （1）证明:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$， ....1 分

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$， ....3 分

所以当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 $f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 存在唯一的零点. ....5 分

(2)证明:由（1）知 $f(x)\geq0$，即 $x-1\geq\ln x$， ....7 分

所以 $x\leq e^{x-1}<e^x$，$x>\ln x$ ， ....9 分

综上，$e^x>x>\ln x$. ....10 分

B （1）证明：当$a=1$时，$f(x)=x-1-\ln x$，定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

……………………1 分

当 $x>1$时，$f'(x)>0$，当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，……………………………3 分

所以当$x=1$时，函数$f(x)$有最小值$f(1)=0$，

所以$f(x)$存在唯一的零点. ……………………………………5 分

（2）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$，……………………6 分

当$a\le 0$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，

而$f(1)=a-1<0$，不合题意；……………………………………7 分

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，有$x=\dfrac{1}{a}$，

列表如下：

x	$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	负		正
$f(x)$	减函数	极小值	增函数

所以，当$x=\dfrac{1}{a}$时，函数$f(x)$有极小值，也是最小值，则$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln\dfrac{1}{a}\ge 0$，

……………………………………9 分

解得$a\ge 1$，即实数a的取值范围是$[1,+\infty)$. ………………………………………………10 分

21. A （1）由已知设直线l的方程为$y=x-\dfrac{p}{2}$，

代入$y^2=2px$，得$x^2-3px+\dfrac{p^2}{4}=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，显然$\Delta>0$，则$x_1+x_2=3p$，……………………………………3 分

则由抛物线的定义，得$|AB|=x_1+x_1+p=4p=8$，解得$p=2$，

则有抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.　　　　..5 分

（1）设直线 $m: y-\frac{3}{2}=k(x+1)(k\neq 0)$ 过点 P 与抛物线 C 相切，

代入 $y^2=4x$，有 $ky^2-4y+4k+6=0$.

则 $\Delta=16-4k(4k+6)=0$，即 $4k^2+6k-4=0$，　　..7 分

设 $k_{PA}=k_1,k_{PB}=k_2$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=k_1\cdot k_2=-\frac{4}{4}=-1$，　　..............................9 分

则有 $PA\perp PB$.　　　　...10 分

B （1）由已知设直线 l 的方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，

代入 $y^2=2px$，得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，　显然 $\Delta>0$，则 $x_1+x_2=3p$，...3 分

则由抛物线的定义，得 $|AB|=x_1+x_1+p=4p=8$，解得 $p=2$，

则有抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.　　　　..5 分

（1）设直线 $m: y-b=k(x-a)(k\neq 0)$ 过点 P 且与抛物线 C 相切，

代入 $y^2=4x$，得 $ky^2-4y+4b-4ak=0$，

由 $\Delta=16-4k(4b-4ak)=0$，有 $ak^2-bk+1=0$. ....7 分

$\Delta=b^2-4a>0$，　设 $k_{PA}=k_1,k_{PB}=k_2$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=k_1\cdot k_2=\frac{1}{a}$，

又 $PA\perp PB$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{a}=-1$，　　..9 分

解得 $a=-1$.　　　　...10 分