2020-2021 学年第一学期高二年级期末考试

数学试卷（文科）

（考试时间：上午 8:00-9:30）

说明：本试卷为闭卷笔答，答题时间为 90 分钟，满分 100 分。

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1、命题“若 $x=3$，则 $|x|=3$”的否命题是

A、若 $x=3$，则 $|x|\neq 3$

B、若 $x=-3$，则 $|x|=3$

C、若 $x\neq 3$，则 $|x|\neq 3$

D、若 $|x|\neq 3$，则 $x\neq 3$

答案：C

解析：命题“若 $x=3$，则 $|x|=3$”的否命题是“若 $x\neq 3$，则 $|x|\neq 3$”，所以选 C

2、已知 $f(x)=2^x$，则 $f'(x)=$

A、 2^x

B、 $x\cdot 2^{x-1}$

C、 $\dfrac{2^x}{\ln 2}$

D、 $2^x\cdot\ln 2$

答案：D

解析：函数 $f(x)=2^x$， $f'(x)=2^x\cdot\ln 2$，所以选 D

3、已知抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $F(1,0)$，则 $p=$

A、4

B、2

C、1

D、$\frac{1}{2}$

答案：B

解析：抛物线 $y^2=2px$ ，焦点坐标 $(\frac{p}{2},0)$ ，则 $\frac{p}{2}=1$ ， $p=2$ ，所以选 B

4、已知命题 “ $p\vee q$ ” 为真命题，“ $\neg p$ ” 为真命题，则

A、p 为假命题，q 为真命题

B、p 为真命题，q 为真命题

C、p 为真命题，q 为假命题

D、p 为假命题，q 为假命题

答案：A

解析：“ $\neg p$ ” 为真命题，所以 p 为假命题；“ $p\vee q$ ” 为真命题，故 q 为真命题，所以选 A

5、已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{3}x$ ，则

A、 $b=3a$

B、 $a=3b$

C、 $a=\sqrt{3}b$

D、 $b=\sqrt{3}a$

答案：B

解析：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$ ，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$ ， $a=3b$ ，所以选 B

6.已知函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的可导函数，且导函数为 $f'(x)$ 则"对任意的 $x\in(a,b)$ ，$f'(x)>0$ "是" $f(x)$ 在 (a,b) 上为增函数"的

A. 充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　　　　　D.既不充分也不必要条件

答案：A

解析：$f(x)$在(a,b)上为增函数，则$f'(x)\geq 0$

7.已知直线$y=kx$是曲线$y=e^x$的切线，则实数k的值为

A．$-\frac{1}{e}$　　B. -e　　C.$\frac{1}{e}$　　D. e

答案：D

解析：设切点坐标为(x_0,y_0)，对于$y=e^x$，$y'=e^x$，则e^{x_0}=k，$y_0=kx_0$，$y_0=e^{x_0}$，所以$kx_0=e^{x_0}=k$，易知$x_0\neq 0$，

$k>0$,所以$x_0=1$，所以$k=e$

8.已知命题$p:\forall x\in R,ax^2+2x+3>0$是真命题，那么实数$a$的取值范围是

A. $a<\frac{1}{3}$　　B. $0<a\leq\frac{1}{3}$　　C. $a>\frac{1}{3}$　　D. $a\leq\frac{1}{3}$

答案：C

解析：$\because$对$\forall x\in R,ax^2+2x+3>0$是真命题，$\therefore ax^2+2x+3>0$对任意的$x\in R$恒成立，$\therefore\begin{cases}a>0\\ \Delta=4-12a<0\end{cases}$ $\therefore a>\frac{1}{3}$

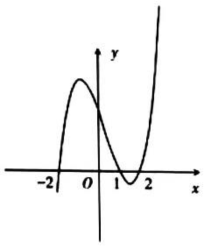
9.已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，函数$g(x)=(x-1)f'(x)$的图象如图所示，则下列结论正确的是

A. $f(x)$在上$(-\infty,-2),(1,2)$为减函数

B. $f(x)$在上$(-2,1),(2,+\infty)$为增函数

C. $f(x)$的极小值为$f(-2)$，极大值为$f(2)$

D. $f(x)$的极大值为$f(-2)$，极小值为$f(2)$



答案：D

解析：当$x<-2$时，$g(x)=(x-1)f'(x)<0$，则$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$-2<x<1$时，$g(x)=(x-1)f'(x)>0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减

当$1<x<2$时，$g(x)=(x-1)f'(x)<0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减

当$x>2$时，$g(x)=(x-1)f'(x)>0$，则$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增

所以 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递减，在 $(-\infty,-2),(2,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)$，极小值为 $f(2)$

10. 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 P 向 z 轴作垂线，垂足恰为椭圆的左焦点 F_1，点 A,B 分别为椭圆的右顶点和上顶点，若 $OP//AB$（O 为坐标原点），则该椭圆的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

答案：C

解析：设 $P(-c,\frac{b^2}{a})$，$\because A(a,0),B(0,b),AB//OP\ \therefore k_{AB}=k_{OP}$，即 $\frac{b}{-a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{-c}$，$\therefore b=c$，

$\therefore e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{2c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

11.已知曲线 $E:x^2+y^2\cos\alpha=1,(\alpha\in[0,\pi))$，则下列描述正确的是（　　）

①当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，曲线 E 表示双曲线，焦点在 x 轴上；

②当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 E 表示以原点为圆心，半径为 1 的圆；

③当 $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 E 围成图形的面积最小值为 π。

A.①②　B. ①③　C. ②③　D.①②③

答案：B

解析：已知曲线 $E:x^2+y^2\cos\alpha=1,(\alpha\in[0,\pi))$,则,

当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，$x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1,m=1,n=\frac{1}{\cos\alpha}$，$\cos\alpha\in(-1,0),n=\frac{1}{\cos\alpha}\in(-\infty,-1)$，表示双曲线，焦点在 x 轴上，①正确

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{2}=0$，$x^2=1,x=\pm1$，表示两条直线，②错误

当 $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1,m=1,n=\frac{1}{\cos\alpha}$，$\cos\alpha\in(0,1],n=\frac{1}{\cos\alpha}\in[1,+\infty)$，表示圆或者焦点在 y 轴上，短轴等于 2 的椭圆，表示圆时面积最小等于 π，③正确

所以选 B，①③正确

12.现有橡皮泥制作的底面半径为 4 ，高为 3 的圆锥一个。若将它重新设计做成一个底面半径为 r ，高为 h 的圆柱（橡皮泥没有浪费），则该圆柱表面积的最小值为（　　）

$A.20\pi$　　$B.24\pi$　　$C.28\pi$　　$D.32\pi$

答案： B

解析：由题意可得橡皮泥得体积 $V=\frac{1}{3}\bullet\pi\bullet4^2\times3=16\pi$,所以 $\pi r^2h=16\pi,h=\frac{16}{r^2}$ ，

圆柱得表面积为 $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\frac{16}{r^2}=2\pi(r^2+\frac{16}{r})$ ，

$r^2+\frac{16}{r}=r^2+\frac{8}{r}+\frac{8}{r}\geq3\bullet\sqrt[3]{r^2\times\frac{8}{r}\times\frac{8}{r}}=12$ (平均数不等式)，当且仅当 $r^2=\frac{8}{r}=\frac{8}{r},r=2$ 时，等号成立，所以 $S\geq24\pi$ 。

求 $r^2+\frac{16}{r}$ 的最值也可以用求导判断单调性的方法。

所以选 B

二、填空题

13．命题“存在实数 x_0 ，使得 2^{x_0} 大于 3^{x_0} ”，用符号语言可表示为_________.

答案： $\exists x_0\in R,2^{x_0}>3^{x_0}$

解析：略

14．已知双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$ ，且与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点，则该曲线的标准方程为_________.

答案： $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

解析：椭圆中 $c^2=a^2-b^2=4$ ，$\therefore c=2$ ，因为所求双曲线与椭圆焦点相同，且双曲线离心率为 $\sqrt{2}$ ，$\therefore$ 在双曲线中 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{a}=\sqrt{2}$ ，$\therefore a=\sqrt{2}$ ， $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ ，$\therefore$ 双曲线标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

15.函数 $y=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，则实数 $a=$

答案：4

解析： $y'=3x^2+2ax+b$ ，在 $x=1$ 处有极值 10。

当 $x=1$ ，$3+2a+b=0$ ，

当 $x=1$ ，$1+a+b+a^2=10$

$\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$，$\begin{cases}a=4\\b=-11\end{cases}$，当$\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$，$y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$，函数没有极值，所以舍去，得$a=4$

16.已知点A,B为抛物线$C:y^2=4x$上不同于原点O的两点，且$OA\perp OB$,则$\triangle OAB$的面积的最小值为

答案：16

解析：由对称性知，当$\triangle OAB$的面积最小时，A,B两点关于x轴对称，又$OA\perp OB$，则直线OA的方程为$y=x$，

则点$A(4,4),|OA|=4\sqrt{2}$，因此$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\left(4\sqrt{2}\right)^2=16$.

三、解答题（本大题共5小题，共48分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题8分）

已知命题$p:0\leq x\leq 1;q:a-1\leq x\leq 2a(a>0)$.

(1)若$a=1$，写出命题“若p则q “的逆否命题，并判断真假;

(2)若p是q的充分不必要条件，求实数a的取值范围.

答案：(1)逆否命题：若$x<0$或$x>2$，则$x<0$或$x>1$.是一个真命题.　(2)$[\frac{1}{2},1]$

解析：(1)当$a=1$时，$q:0\leq x\leq 2$，

逆否命题：若$x<0$或$x>2$，则$x<0$或$x>1$.

它是一个真命题。

(2)因为p是q的充分不必要条件，

所以集合$\{x|0\leq x\leq 1\}$时集合$\{x|a-1\leq x\leq 2a\}$的真子集，

所以$\begin{cases}a-1\leq 0\\2a\geq 1\end{cases}$，且等号不能　同时取到，

解得$\frac{1}{2}\leq a\leq 1$.

所以有实数a的取值范围为$[\frac{1}{2},1]$.

18.（本小题10分）

已知函数$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+1$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值.

答案：(1)函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$，$(4,+\infty)$ ，单调递增区间是 $(0,4)$.　(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 $\frac{19}{3}$ ，最小值为 1 .

解析：(1)解： $f'(x)=-x^2+4x$ ，

令 $f'(x)=0$ ，解得 $x_1=0$，$x_2=4$，

当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $0<x<4$ 时， $f'(x)>0$， 函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>4$ 时， $f'(x)<0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$，$(4,+\infty)$ ，单调递增区间是 $(0,4)$.

(2) 解：由(1)知，当 $x=0$ 时， $f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(0)=1$ ，

又 $f(-1)=\frac{10}{3}$ ， $f(2)=\frac{19}{3}$ ，

函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 $\frac{19}{3}$ ，最小值为 1 .

19.（本小题满分 10 分）

已知圆 $O: x^2+y^2=4$ ，点 P 为圆 O 上的动点， $DP\perp x$ 轴，垂足为 D ，若 $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}$ 设点 M 的轨迹曲线为 E

（1）求曲线 E 的轨迹方程；

（2）若直线 $l: y=kx$ 与曲线 E 曲线 E 交于 A,B 两点， $F(0,\sqrt{5})$ ，且 ΔAFB 的面积为 2 求 k 的值

答案：（1） $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$ （2） $k=\pm3$

解析：（1）设点 M 坐标 (x,y) ，点 P 坐标 (x_0,y_0) ，则 $x=x_0$ ， $y=\frac{3}{2}y_0$

所以 $x_0=x$ ， $y_0=\frac{2}{3}y$ ，因为点 P 为圆 O 上的动点，所以 ${x_0}^2+{y_0}^2=4$ ，

所以 $x^2+\frac{4}{9}y^2=4$ 即 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$

（2）$\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $x^2=\dfrac{36}{4k^2+9}$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),x_1<x_2$,则 $x_1=-\sqrt{\dfrac{36}{4k^2+9}}$ $x_2=\sqrt{\dfrac{36}{4k^2+9}}$，

$S_{\Delta AFB}=\dfrac{1}{2}\times|x_1-x_2|\times\sqrt{5}=2$,解得 $k=\pm 3$

20. A 已知函数 $f(x)=x-1-\ln x$

(1)证明：$f(x)$ 存在唯一零点

（2）当 $f(x)>0$ 时，证明 $e^x>x>\ln x$

解析：（1）$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$

当 $x>1$，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$，$f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 最小值 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 存在唯一零点

（2）由（1）知当 $f(x)\geq 0$,即 $x-1\geq \ln x$，所以 $e^x>e^{x-1}\geq x$，$x>\ln x$

所以 $e^x>x>\ln x$

B 已知函数 $f(x)=ax-1-\ln x$

（1）当 $a=1$ 时，证明 $f(x)$ 存在唯一零点

（2）当 $f(x)\geq 0$,时，求 a 的取值范围

解析：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$

当 $x>1$，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$，$f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 最小值 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 存在唯一零点

（2）$f'(x)=\dfrac{ax-1}{x}$，

当 $a\leq 0$, $f'(x)<0$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

而 $f(1)=a-1<0$，不合题意

当 $a>0$,令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{a}$

所以当 $0<x<\dfrac{1}{a}$，$f'(x)<0$ 单调递减

当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$ 单调递增

所以 $f(x)$ 最小值 $f(\frac{1}{a})\geq 0$

所以 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$

21.（本小题 10 分）说明：请考生在（A）（B）两个小题中任选一题作答.

（A）已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$，斜率为 1 的直线 l 过抛物线 C 的焦点，与抛物线 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=8$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）设点 $P\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，过点 P 作直线 PM,PN 与抛物线 C 相切，切点分别为 M,N，证明：$PM\perp PN$.

答案：（1）$y^2=4x$；（2）略

解析：（1）由直线的斜率为 1，且过焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$ 可得直线方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，与抛物线方程 $y^2=2px$ 联立可得：

$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，不妨设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，显然 $\Delta>0$，则 $x_1+x_2=3p$，由抛物线焦点弦的坐标公式可得：

$|AB|=x_1+x_2+p=4p=8$，解得 $p=2$.

（2）设直线 $m:y-\frac{3}{2}=k\left(x+1\right)\left(k\neq 0\right)$，过点 P 与抛物线 C 相切，与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立可得：

$ky^2-4y+4k+6=0$，则 $\Delta=16-4k\left(4k+6\right)=0$，即 $4k^2+6k-4=0$，不妨即 $k_{PA}=k_1$，$k_{PB}=k_2$，则

$k_{PA}\cdot k_{PB}=k_1\cdot k_2=-1$，则有 $PA\perp PB$.

(B)已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$，斜率为 1 的直线 l 过抛物线 C 的焦点，与抛物线 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=8$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）设点 $P\left(a,b\right)\left(a<0\right)$，过点 P 作直线 PM,PN 与抛物线 C 相切，切点分别为 M,N，若 $PM\perp PN$，求 a 的值.

答案：（1）$y^2=4x$；（2）略

解析：（1）由直线的斜率为 1，且过焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$ 可得直线方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，与抛物线方程 $y^2=2px$ 联立可得：

$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，不妨设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，显然 $\Delta>0$，则 $x_1+x_2=3p$，由抛物线焦点弦的坐标公式可得：

$|AB|=x_1+x_2+p=4p=8$，解得 $p=2$.

（2）设直线 $m:y-b=k\left(x-a\right)\left(k\neq 0\right)$，过点 P 与抛物线 C 相切，与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立可得：

$ky^2-4y+4b-4ak=0$,则 $\Delta=16-4k\left(4b-4ak\right)=0$,即 $ak^2-bk+1=0$ ，$\Delta=b^2-4a>0$,不妨即 $k_{PA}=k_1$ ，$k_{PB}=k_2$ ，

则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=k_1\cdot k_2=\frac{1}{a}$ ，又 $PA\perp PB$ ，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{a}=-1$ ，解得 $a=-1$.