2020-2021 学年第一学期高二年级期末考试

数学理科 参考答案与评分建议

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	A	D	D	C	B	C	C	B	A

二、填空题

13、$\exists x_0 \in R, 2^{x_0} > 3^{x_0}$ 14、$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 15、3 16、$\frac{\sqrt{2}}{3}$

三、解答题

17.（1）当 $a=1$ 时，$q: 0 \le x \le 2$，..............................1 分

逆否命题为：若 $x<0$ 或 $x>2$，则 $|2x-1|>1$. ....3 分

它是一个真命题. ....4 分

（2）因为 p 是 q 的充分不必要条件，

所以集合 $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$ 是集合 $\{x \mid a-1 \le x \le 2a\}$ 的真子集，..............................5 分

所以 $\begin{cases} a-1 \le 0 \\ 2a \ge 1 \end{cases}$，且等号不能同时取到，..............................7 分

解得 $\frac{1}{2} \le a \le 1$，

所以有实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. ....8 分

18.（1）因为 ΔABC 为正三角形，点 M 为 ΔABC 的重心，所以 N 为 BC 的中点，

所以 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$，..............................2 分

所以 $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$. ....5 分

（2）设三棱柱的棱长为 m，

则 $\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m^2 \times \frac{1}{2} - m^2 \times \frac{1}{2} = 0$，.....9 分

所以 $A_1M \perp AB$. ....10 分

19.（1）由已知，设直线 l 为 $y=x-\frac{p}{2}$，

代入 $y^2=2px$，得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$.

显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3p$，..3 分

则由抛物线的定义，得 $|AB|=x_1+x_1+p=4p=8$，解得 $p=2$，

则有抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ....5 分

（2）因为 $P(1,y)(y>0)$ 在抛物线 C 上，所以有 $P(1,2)$. ....6 分

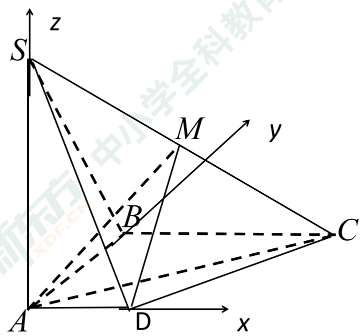
设点 P 关于直线 $y=x-7$ 的对称点的坐标为 $Q(x_1,y_1)$，

则 $\begin{cases}\frac{y_1-2}{x_1-1}=-1\\ \frac{y_1+2}{2}=\frac{x_1+1}{2}-7\end{cases}$，..8 分

解得 $\begin{cases}x_1=9\\ y_1=-6\end{cases}$，..9 分

又因为 $(-6)^2=4\times 9$，所以点 Q 在抛物线 C 上. ....10 分

20． **A**（1）由已知 $AS\perp AB,AS\perp AD,AB\perp AD$，



如图，以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $B(0,2,0),C(2,2,0),D(1,0,0),S(0,0,2)$，$M(1,1,1)$，

则 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1),\overrightarrow{DC}=(1,2,0)$，..3 分

则 $\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以异面直线 AM,CD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ....5 分

（2）设平面 DCS 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{DC}=(1,2,0),\overrightarrow{DS}=(-1,0,2)$，

得 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=x+2y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DS}=-x+2z=0\end{cases}$，可取 $\vec{m}=(2,-1,1)$；..6 分

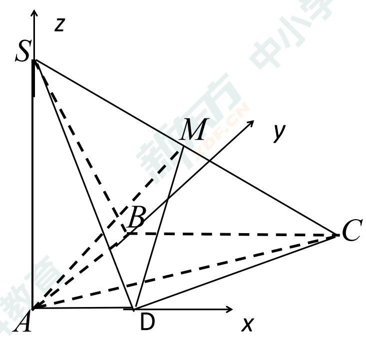
设平面 BCS 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{BC}=(2,0,0),\overrightarrow{BS}=(0,-2,2)$，

得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-2y+2z=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(0,1,1)$. ....7 分

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=0$， ....9 分

所以二面角 $D-SC-B$ 的大小为 $90°$. ....10 分

B （1）由已知 $AS\perp AB,AS\perp AD,AB\perp AD$，



如图，以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $B(0,2,0),C(2,2,0),S(0,0,2)$， $M(1,1,1)$，

又 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(AD+2)\times2\times2=2$，得 $AD=1$，则 $D(1,0,0)$，

则 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1),\overrightarrow{DC}=(1,2,0)$， ....3 分

则 $\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以异面直线 AM,CD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ....5 分

(2) 设 $D(a,0,0)$，平面 ADM 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1),\overrightarrow{AD}=(a,0,0)$，

得 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=x+y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=ax=0\end{cases}$，可取 $\vec{m}=(0,1,-1)$； ....6 分

设平面 CDM 即平面 DSC 一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{DC}=(2-a,2,0),\overrightarrow{SC}=(2,2,-2)$，

得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=(2-a)x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=2x+2y-2z=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(2,a-2,a)$. ....7 分

则有 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{4+(a-2)^2+a^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=1$. ....9 分

所以 $AD=1$. ....10 分

21. A （1）设点 M 的坐标为 (x,y)，点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $x=x_0$，$y=\dfrac{3}{2}y_0$. ....2 分

所以有 $x_0=x,y_0=\dfrac{2}{3}y$，因为点 P 在圆上，所以 ${x_0}^2+{y_0}^2=4$.

则有 $x^2+\dfrac{4}{9}y^2=4$，即 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$，

所以曲线 E 的方程为 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$. ....5 分

（2）由 $\begin{cases}y=x+2\\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1\end{cases}$，有 $13x^2+16x-20=0$，显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{16}{13},x_1x_2=-\dfrac{20}{13}$，则有 $|AB|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{36\sqrt{2}}{13}$ ....7 分

设与直线 l 平行的直线 $l_1:y=x+m$ 与曲线 E 相切，

则由 $\begin{cases}y=x+m\\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1\end{cases}$，有 $13x^2+8mx+4m^2-36=0$，

由 $\Delta=0$ 解得 $m=\pm\sqrt{13}$（$m=\sqrt{13}$ 舍去）

则直线 l,l_1 之间的距离 $d=\dfrac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$，

所以 ΔNAB 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times|AB|\times\dfrac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\dfrac{18}{13}\left(2+\sqrt{13}\right)$. ....10 分

B （1）设点 M 的坐标为 (x,y)，点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则有 $x=x_0$，$y=\dfrac{3}{2}y_0$. ....2 分

所以有 $x_0=x,y_0=\dfrac{2}{3}y$，因为点 P 在圆上，所以 ${x_0}^2+{y_0}^2=4$.

则有 $x^2+\dfrac{4}{9}y^2=4$，即 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$，

所以曲线 E 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$. ....5 分

（2）由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\sqrt{5} \\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1 \end{cases}$，有 $5x^2+2\sqrt{5}x-8=0$，显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5},x_1x_2=-\frac{8}{5}$， ....6 分

设 $N(x,y)$，则 $\begin{cases} x=\lambda x_1+\mu x_2 \\ y=\lambda y_1+\mu y_2 \end{cases}$，又点 N 在曲线 E 上，则

$\lambda^2(4{y_1}^2+9{x_1}^2)+\mu^2(4{y_2}^2+9{x_2}^2)+2\lambda\mu(4y_1y_2+9x_1x_2)=36$， ....7 分

又 $4y_1y_2+9x_1x_2=4\left(\frac{1}{2}x_1+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}x_2+\sqrt{5}\right)+9x_1x_2$

$=10x_1x_2+2\sqrt{5}(x_1+x_2)+20$

$=10\times\left(-\frac{8}{5}\right)+2\sqrt{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+20=0$，

$4{y_1}^2+9{x_1}^2=36$， $4{y_2}^2+9{x_2}^2=36$，

则 $36\lambda^2+36\mu^2=36$，

所以 $\lambda^2+\mu^2=1$ 为定值. ....10 分