2020-2021 学年第一学期高二年级期末考试

数学试卷（理科）

说明：本试卷为闭卷笔答，答题时间 90 分钟，满分 100 分。

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 命题“若 $x=3$，则 $|x|=3$”的否命题是

A. 若 $x=3$，则 $|x|\neq 3$

B. 若 $x=-3$，则 $|x|=3$

C. 若 $x\neq 3$，则 $|x|\neq 3$

D. 若 $|x|\neq 3$，则 $x\neq 3$

答案：C

解析：命题“若 $x=3$，则 $|x|=3$”的否命题是若 $x\neq 3$，则 $|x|\neq 3$，即选 C；

2. 已知抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $F(1,0)$，则 p =

A. 4

B. 2

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

答案：B

解析：由题意可知 $\frac{p}{2}=1$， $p=2$，即选 B；

3. 已知空间两点 A（ $0,1,1$ ），B（ $1,-2,1$ ）则线段 AB 的中点坐标是

A. （ $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1$ ）

B. （ $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ ）

C. （ $-\frac{1}{2},\frac{3}{2},0$ ）

D. （$\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0$）

答案：A

解析：空间两点 A（$0,1,1$），B（$1,-2,1$）则线段 AB 的中点坐标是（$\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1$），即选 A；

4. 已知 $a\in R$，则“$a>1$”是“$a^2>1$”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案：A

解析：$a^2>1$ 得 $a>1$ 或 $a<-1$，即 $a>1$ 是 $a^2>1$ 的充分不必要条件，即选 A；

5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{3}x$，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{10}$

B. 2

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

答案：D

解析：双曲线的 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 渐近线方程为 $y=\frac{1}{3}x$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$，$a=3b$，$c=\frac{\sqrt{10}}{3}a$，离心率 $e=\frac{c}{a}$，即选 D；

6.已知平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,2)$，$A\in\alpha$ 且 $\overrightarrow{AB}=(-4,0,2)$，则下列结论正确的是(　　)

A. $AB// \alpha$

B. $AB\perp\alpha$，垂足为 A

C. $AB\cap\alpha=A$，但不垂直

D. $AB\subset\alpha$

答案：D

解析：由题可知 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,所以 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\because\vec{n}\perp\alpha$，$\therefore AB//\alpha$ 或 $AB\subset\alpha\because A\in\alpha,\therefore AB\subset\alpha$

7.已知命题 $p:\forall x\in R$，$ax^2+2x+3>0$的否定是真命题，那么实数 a的取值范围是（　　）

A. $a<\frac{1}{3}$

B. $0<a\le\frac{1}{3}$

C. $a\le\frac{1}{3}$

D. $a\ge\frac{1}{3}$

答案：C

解析：先写出原命题的否定：$\neg p:\exists x\in R,ax^2+2x+3\le0$当 $a=0$时，成立；当 $a>0$时，使 $\Delta\ge0,$解得 $a\le\frac{1}{3}$；当 $a<0$时，成立。综上得，$a\le\frac{1}{3}$

8.已知 $\vec{a}=(1-t,1,0)$，$\vec{b}=(2,t,t)$，则 $\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$的最小值是（　　）

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{5}$

答案：B

解析：由题可知 $\vec{b}-\vec{a}=(1+t,t-1,t)$，$\therefore\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{(1+t)^2+(t-1)^2+t^2}=\sqrt{3t^2+2},\therefore$当 $t=0$时，$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$取得最小值 $\sqrt{2}$

9.从椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$上一点 P向 x轴作垂线，垂足恰为椭圆的左焦点 F_1，点 A,B分别为椭圆的右顶点和上顶点，若 $OP//AB$, O为坐标原点，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

答案：C

解析：由题可知 $P\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$，$\because A(a,0),B(0,b),AB//OP,\therefore k_{AB}=k_{OP}$，即 $\frac{b}{-a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{-c}$，$\therefore b=c$，

$\therefore e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{2c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

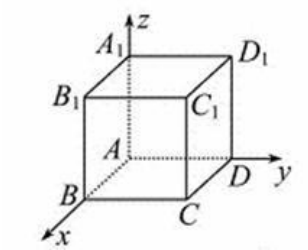
10.设正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a ，AC' 与 BD' 相交于 O ，则（　　）

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}=2a^2$　　B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}=\sqrt{2}a^2$

C. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}a^2$　　D. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA'}=a^2$

答案：C

解析：如图建立空间直角坐标系，可写出各点坐标，如



$A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$,经过分析可得 O 为体对角线交点 $\therefore O\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$

$\therefore\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}a^2$

11.已知曲线 $E:x^2+y^2\cos\alpha=1(\alpha\in[0,\pi))$，则下列结论正确的是

（1）当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，曲线 E 表示双曲线，焦点在 x 轴上

（2）若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 E 表示以原点为圆心，半径为 1 的圆

（3）当 $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 E 围成图形的面积的最小值为 π

A(1)(2)　　B(1)(3)　　C(2)(3)　　D(1)(2)(3)

答案：B

解析：当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，$-1<\cos\alpha<0$，所以（1）正确

若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\alpha=0$，逆所以（2）不正确，故选 B

12.已知 $A(2,0,1),B(2,2,1),C(0,0,2),M(2,\lambda,2),(\lambda>0)$，那么点 M 到平面 ABC 的距离为

$A\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　$B\sqrt{2}\lambda$　　$C\frac{2\sqrt{2}}{5}\lambda$　　$D2\sqrt{3}$

答案：A

解析：$\overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{AC}=(-2,0,1)$，则它的法向量为 $\vec{n}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{MA}=(0,\lambda,1)$，则点 M 到平面 ABC 的距离为 $d=\left|\overrightarrow{MA}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、填空题

13．命题“存在实数 x_0，使得 2^{x_0} 大于 3^{x_0}”，用符号语言可表示为__________.

答案： $\exists x_0 \in R, 2^{x_0} > 3^{x_0}$

解析：略

14．已知双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$，且与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点，则该曲线的标准方程为____________.

答案： $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

解析：椭圆中 $c^2=a^2-b^2=4$，$\therefore c=2$，因为所求双曲线与椭圆焦点相同，且双曲线离心率为 $\sqrt{2}$，$\therefore$ 在双曲线中 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{a}=\sqrt{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}$，　$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$，$\therefore$ 双曲线标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

15.已知抛物线 $C: x^2=4y$ 的焦点为 F, M 是 C 上一点，FM 的延长线交 x 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$ ____________。

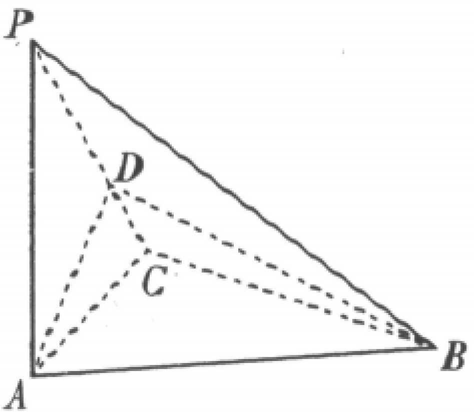
答案： 3

解析： 由题意可知抛物线焦点 F 点坐标 $(0,1), N$ 点纵坐标为 $0,$

因为 M 是 FN 的中点，所以 M 点纵坐标为 $\frac{1}{2}$, 且 M 在 C 上，

代入可得 $M\left(\pm\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$, 则 $|FM|=\sqrt{\left(\pm\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}, |FN|=2|FM|=2\times\frac{3}{2}=3.$

16.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABC, \triangle ACB$ 为等腰直角三角形，$PA=AC=BC=2,$ 点 D 在 PC 上，且 $CD:DP=1:2,$ 则 PB 与平面 ABD 所成角的正弦值为__________。



答案：$\frac{\sqrt{2}}{3}$

解析：过点 C 作平面 ABC 的垂线 CE，以 C 为坐标原点，分别以 CA,CB,CE 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系。

则 $P(2,0,2),A(2,0,0),B(0,2,0),D\left(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right)$,

则 $\overrightarrow{PB}=(-2,2,-2),\overrightarrow{AB}=(-2,2,0),\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{4}{3},0,\frac{2}{3}\right)$,

设平面 ABD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0\\ -\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}z=0\end{cases}$，令 $z=2$，则 $x=1,y=1.$

则 $\vec{m}=(1,1,2)$,

设 PB 与平面 ABD 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{PB},\vec{m}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}\right|=\left|\frac{-2\times1+2\times1+(-2)\times2}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 48 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 8 分）

已知命题 $p:|2x-1|\le1;q:a-1\le x\le2a(a>0)$.

（1）若 $a=1$，写出命题“若 p 则 q”的逆否命题，并判断真假；

（2）若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

答案：（1）真命题；（2）$\left[\frac{1}{2},1\right]$

解析：（1）当 $a=1$ 时，$q:0\le x\le2$，

逆否命题为：若 $x<0$ 或 $x>2$，则 $|2x-1|>1$.

它是一个真命题

（2）因为 p 是 q 的充分不必要条件，

所以集合 $\{x|0\le x\le1\}$ 是集合 $\{x|a-1\le x\le2a\}$ 的真子集，

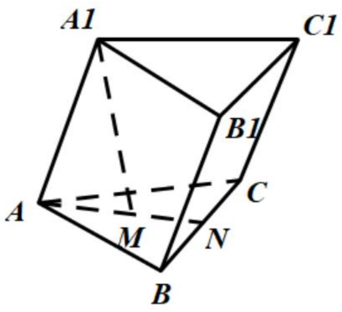
所以 $\begin{cases} a-1\le 0 \\ 2a\ge 1 \end{cases}$，且等号不能同时取到，

解得 $\frac{1}{2}\le a\le 1$，所以有实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$

18. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，$\angle A_1AB=\angle A_1AC=60^\circ$，点 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，AM 的延长线交 BC 于点 N，连接 A_1M，设 $\overrightarrow{AB}=a,\overrightarrow{AC}=b,\overrightarrow{AA_1}=c.$

（1）用 a,b,c 表示 $\overrightarrow{A_1M}$

(2)证明：$A_1M\perp AB$



答案：（1）$\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$

（2）见后

解析：（1）因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，点 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 N 为 BC 的中点，

所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

所以 $\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$

（2）设三棱柱的棱长为 m，

则 $\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{a}^2+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{3}m^2\times\frac{1}{2}-m^2\times\frac{1}{2}=0$

所以 $A_1M\perp AB$

19.（本小题 10 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 C 的焦点，与抛物线 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=8.$

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若点 $P(1,y)(y>0)$ 在抛物线 C 上，证明点 P 关于直线 $y=x-7$ 的对称点 Q 也在抛物线 C 上.

答案：（1）$y^2=4x$ （2）见解析

解析：（1）由已知，设直线 l 为 $y=x-\frac{p}{2}$，代入 $y^2=2px$，

得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$

显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3p$

由抛物线的定义得 $|AB|=x_1+x_2+p=4p=8$，解得 $p=2$

则抛物线方程为 $y^2=4x$

（2）因为点 $P(1,y)(y>0)$ 在抛物线 C 上，所以有 $P(1,2)$

设点 P 关于直线 $y=x-7$ 的对称点的坐标为 $Q(x,y)$

则 $\begin{cases}\frac{y-2}{x-1}=-1\\ \frac{y+2}{2}=\frac{x+1}{2}-7\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=9\\ y=-6\end{cases}$

又因为 $(-6)^2=4\times9$，所以点 Q 在抛物线 C 上.

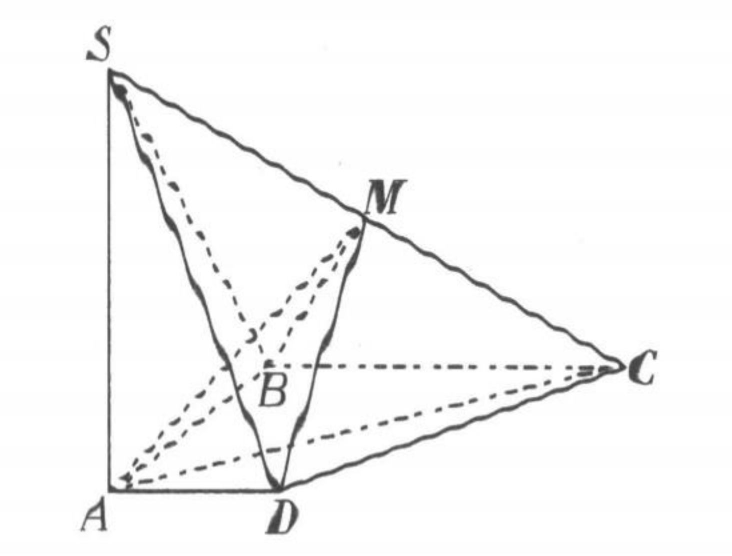
20（本小题 10 分）说明：请考生在(A), (B)两个小题中任选一个作答。

(A) 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，

$AD\perp AB, SA\perp 面ABCD, SA=AB=BC=2, AD=1$

（1） 设点 M 是 SC 的中点，求异面直线 AM,CD 所成角的余弦值

（2） 求二面角 $D-SC-B$ 的大小



答案： (1) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ (2) $\frac{\pi}{2}$

解析：(1) 已知 $SA\perp AB$, $SA\perp AD, AB\perp AD$, 如图，以 A 为原点建立直角坐标系 $A\text{-}xyz$

$B(0,2,0), C(2,2,0), D(1,0,0), S(0,0,2), M(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1), \overrightarrow{DC}=(1,2,0)$,

$\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

所以异面直线 AM,CD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(2)设平面 DCS 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,由$\overrightarrow{DC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{DS}=(-1,0,2)$

得 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=x+2y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DS}=-x+2z=0\end{cases}$ 可得$\vec{m}=(2，-1,1)$,

设平面 BCS 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,由$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BS}=(0,-2,2)$

得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-2y+2z=0\end{cases}$ 可得$\vec{n}=(0,1,1)$,

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\mathrm{m}||\mathrm{n}|}=0$

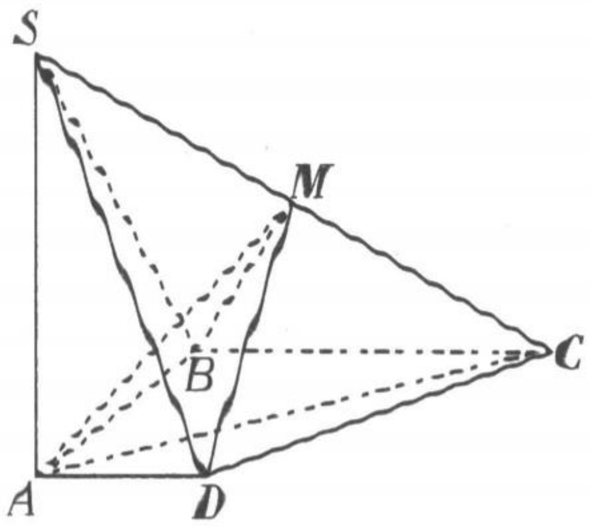
所以二面角 $D-SC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$

(B) 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $AD\parallel BC$ ， $AD\perp AB$,

$SA\perp$面$ABCD$, $SA=AB=BC=2$ ，设点 M 是 SC 的中点

（1）若四棱锥 $S-ABCD$ 的体积为 2，求异面直线 AM,CD 所成角的余弦值

（2）若二面角 $A-DM-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 AD 的长



答案： （1）$\frac{\sqrt{15}}{5}$（2）$AD=1$

解析：（1）已知 $SA\perp AB,\ SA\perp AD, AB\perp AD$, 如图，以 A 为原点建立直角坐标系 A-xyz

$B(0,2,0), C(2,2,0), S(0,0,2), M(1,1,1)$，

又 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(AD+2)\times2\times2=2$, 得 $AD=1$, 得 $D(1,0,0)$

则 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1), \overrightarrow{DC}=(1,2,0)$,

$$\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CD}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

所以异面直线 AM,CD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(2)设 $D(a,0,0)$

平面 ADM 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$, 由 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AD}=(a,0,0)$

得 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=x+y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=ax=0\end{cases}$ 可得 $\vec{m}=(0,1,-1)$,

设平面 CDM 及平面 DSC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$, 由 $\overrightarrow{DC}=(2-a,2,0)$，$\overrightarrow{SC}=(2,2,-2)$

得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=(2-a)x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=2x+2y-2z=0\end{cases}$ 可得 $\vec{n}=(2,2-a,a)$,

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{4+(a-2)^2+a^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $a=1$

所以 $AD=1$

21(A)已知圆 O： $x^2+y^2=4$ ，点 P 为圆 O 上的动点，DP⊥x 轴，垂足为 D，若 $\overrightarrow{DM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}$ 设点 M 的轨迹为曲线 E．

（1）求曲线 E 的方程；

（2）设直线 l: $y=x+2$ 与曲线 E 交于 A,B 两点，点 N 为曲线上不同于 A，B 的一点，求 ΔNAB 面积的最大值．

答案：（1）曲线 E 的方程为 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$ （2）ΔNAB 面积的最大值 $\dfrac{18}{13}(2+\sqrt{13})$

解析：（1）设点 M 的坐标为 (x,y),点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $x=x_0,y=\dfrac{3}{2}y_0$

所以有 $x_0=x,y_0=\dfrac{2}{3}y$ ，因为点 P 在圆上，所以 $x_0{}^2+y_0{}^2=4$。

则有 $x^2+\dfrac{4}{9}y^2=4$,即 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$ ，

所以曲线 E 的方程为 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$。

（1） 由 $y=x+m$ 和 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$ ，有 $13x^2+8mx+4m^2-36=0$ ，

由 $\Delta=0$ 解得 $m=\pm\sqrt{13}$($m=\sqrt{13}$舍去)

则直线 l，l_1 之间的距离 $d=\dfrac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$ ，

所以 ΔNAB 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times|AB|\times\dfrac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\dfrac{18}{13}(2+\sqrt{13})$

(B). 已知圆 O： $x^2+y^2=4$ ，点 P 为圆 O 上的动点，DP⊥x 轴，垂足为 D，若 $\overrightarrow{DM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}$ 设点 M 的轨迹为曲线 E．

（1）求曲线 E 的方程；

（2）直线 l: $y=\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$与曲线 E 交与 A，B 两点，N 为曲线 E 上的任意一点，

$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in \mathrm{R})$，证明：$\lambda^2+\mu^2$为定值。

答案：曲线 E 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$

解析：（1）设点 M 的坐标为 (x,y),点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $x=x_0,y=\frac{3}{2}y_0$

所以有 $x_0=x,y_0=\frac{2}{3}y$，因为点 P 在圆上，所以 $x_0{}^2+y_0{}^2=4$。

则有 $x^2+\frac{4}{9}y^2=4$,即$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$，

所以曲线 E 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$。

（2）由 $y=\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$ 和 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$，有 $5x^2+2\sqrt{5}x-8=0$，显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5},x_1x_2=-\frac{8}{5}$，

设 $N(x,y)$,则 $x=\lambda x_1+\mu x_2$和$y=\lambda y_1+\mu y_2$，又点 N 在曲线 E 上，则

$\lambda^2(4y_1{}^2+9x_1{}^2)+\mu^2(4y_2{}^2+9x_2{}^2)+2\lambda\mu(4y_1y_2+9x_1x_2)=36$

又 $4y_1y_2+9x_1x_2=4\left(\frac{1}{2}x_1+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}x_2+\sqrt{5}\right)+9x_1x_2$

$=10x_1x_2+2\sqrt{5}(x_1+x_2)+20$

$=10\times(-\frac{8}{5})+2\sqrt{5}(-\frac{2\sqrt{5}}{5})+20=0$

$4y_1{}^2+9x_1{}^2=36,4y_2{}^2+9x_2{}^2=36$，

则 $36\lambda^2+36\mu^2=36$，

所以 $\lambda^2+\mu^2=1$为定值。