

山西中考模拟百校联考试卷（一）

数 学

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑）

1. $-\frac{1}{8}$ 的相反数是（ ）

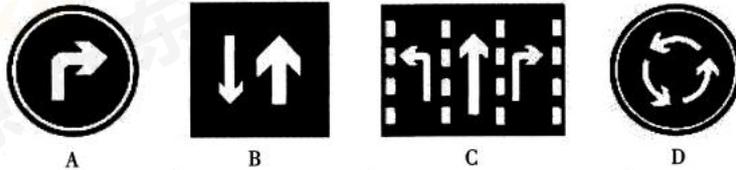
- A. 8 B. -8 C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】D

【考点】相反数

【解析】 $-\frac{1}{8}$ 的相反数为 $\frac{1}{8}$

2. 下列图形中，是轴对称图形的是（ ）



【答案】C

【考点】轴对称图形

【解析】平面内，如果一个图案沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，选 C

3. 下列运算正确的是（ ）

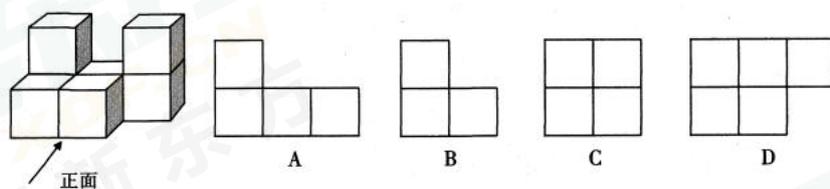
- A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$ B. $(2a + b)(2a - b) = 2a^2 - b^2$ C. $(-a^2)^3 = -a^6$ D. $a^4 + a^4 = 2a^8$

【答案】C

【考点】整式的运算

【解析】C 正确，A 应为： $a^2 \cdot a^4 = a^6$ ，B 应为： $(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - b^2$ ，D 应为： $a^4 + a^4 = 2a^4$

4. 如图是由 7 个完全相同的小立方体搭成的立体图形，则它的左视图是（ ）



【答案】B

【考点】三视图

【解析】从几何体的左侧看到的图形，选 B

5. 21 世纪以来我国经济总量规模扩大了 10 倍，取得了举世瞩目的成就。2020 年我国国内生产总值首次突破 1000000 亿元，达到 1016000 亿元，数据 1016000 用科学记数法表示为 ()

- A. 1.016×10^6 B. 1.016×10^5 C. 10.16×10^5 D. 1016×10^3

【答案】A

【考点】科学计数法

【解析】 $1016000 = 1.016 \times 10^6$ ，选 A

6. 在一个不透明的袋子中有黑、白两种颜色的球，这些球除颜色外完全相同，其中白球有 5 个，黑球有 x 个。从袋子中随机摸出一个球，记下颜色后，放回袋子中并摇匀。重复这一操作，经过大量重复试验发现摸出白球的频率稳定 0.25 附近，则 x 的值为 ()

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

【答案】C

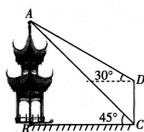
【考点】概率

【解析】由题意可知， $\frac{5}{x+5} = 0.25$ ，解得， $x=15$ ，故选 C.

7. 如图，为了测量某风景区内一座亭 AB 的高度，小亮分别在凉亭对面的高台 CD 的底部 C 和顶部 D 处分别测得凉亭顶部 A 的仰角为 45° 和 30° ，已知高台 CD 为 2m，测凉亭 AB 的高度为(结果保留一位小数， $\sqrt{3} \approx 1.73$)

()

- A. 4.7m B. 4.8m C. 8.1m D. 8.2m

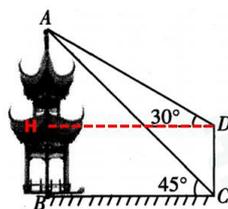


第 7 题图

【答案】A

【考点】三角函数

【解析】



第7题图

如上图所示，过点D作 $DH \perp AB$ 于H， $CD=2$ ，设 $AH=x$

$$\text{在}\triangle AHD\text{中，}\angle ADH=30^\circ, \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH}, \text{即} \tan 30^\circ = \frac{x}{DH} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore DH = \sqrt{3}x$$

由题意可知四边形BCDH为矩形， $\therefore BH=CD=2, BC=DH=\sqrt{3}x$

$$\therefore AB=AH+BH=x+2$$

$$\text{在}\triangle ABC\text{中，}\angle ACB=45^\circ, \therefore BC=AB \qquad \therefore x+2=\sqrt{3}x \qquad \therefore x=\sqrt{3}+1$$

$$\therefore AB=\sqrt{3}+3 \approx 1.73+3 \approx 4.7, \text{即} AB=4.7 \text{米}$$

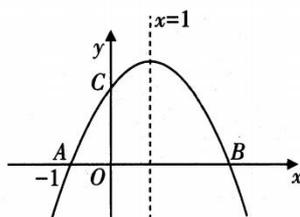
8.已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)的图象如图所示,则下列结论中正确的是 ()

A. $a > 0$

B.当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大

C. $c < 0$

D. $x=3$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根



第8题图

【答案】D

【考点】二次函数图象和性质

【解析】由图可知， $a < 0, c > 0, b > 0$ ，当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小，点 $B(3, 0)$ ，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根为 $x = -1, x = 3$ ，故选D.

9. 估计 $\sqrt{21}-1$ 的值在 ()

- A. 3.3 和 4 之间 B. 3.4 和 3.5 之间
C. 3.5 和 3.6 之间 D. 3.6 和 3.7 之间

【答案】C

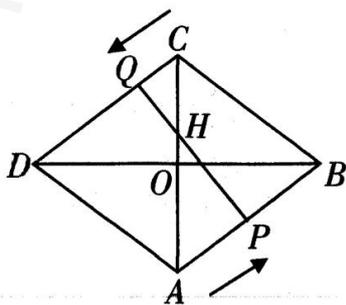
【考点】二次根式估值

【解析】 $4 < \sqrt{21} < 5$ ，更接近 5， $\therefore 4.5 < \sqrt{21} < 5$ ， $4.6^2 = 21.16$ ， $\therefore 4.5 < \sqrt{21} < 4.6$

$\therefore 3.5 < \sqrt{21}-1 < 3.6$

10. 如图,在菱形 ABCD 中,AC=12,BD=16,动点 P 从点 A 出发,以每秒 3 个单位长度的速度向点 B 运动,直到点 B 时停止;动点 Q 同时从 C 点出发,以每秒 2 个单位长度的速度向点 D 运动,当点 P 停止运动时,点 Q 随之停止运动,连接 PQ 交 AC 于点 H. 那么在点 P 的运动过程中,线段 QH 的最小值是 ()

- A. $\frac{48}{5}$ B. $\frac{96}{25}$ C. $\frac{144}{25}$ D. $\frac{48}{25}$



【答案】B

【考点】单线段最值

【解析】由题意可知， $\frac{CQ}{AP} = \frac{2}{3}$ ， \because 四边形 ABCD 为菱形， $\therefore CD \parallel AB$ ，可知 $\triangle CHQ \sim \triangle AHP$ ，

$$\therefore \frac{CH}{AH} = \frac{CQ}{AP} = \frac{2}{3}, \because AC=12, \therefore CH = \frac{24}{5}$$

\therefore 当 $HQ \perp CD$ 时，QH 最小.

在菱形 ABCD 中， $BD \perp AC$ ，BD、AC 互相平分， $BD=16$ ， $AC=12$ ，

$\therefore OC=6$ ， $OD=8$ ，在 $Rt\triangle COD$ 中， $CD=10$

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle CQH$ 中， $\angle COD = \angle CQH = 90^\circ$ ， $\angle OCD = \angle QCH$

$$\therefore \triangle COD \sim \triangle CQH, \therefore \frac{OD}{QH} = \frac{CD}{CH}, \therefore \frac{8}{QH} = \frac{10}{\frac{24}{5}}, \therefore QH = \frac{96}{25}$$

$$\therefore QH \text{ 最小值为 } \frac{96}{25}$$

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. 分解因式 $x^2y - 16y$ 的结果为_____.

【答案】 $y(x+4)(x-4)$

【考点】 因式分解

【解析】 $x^2y - 16y = y(x^2 - 16) = y(x+4)(x-4)$

12. 不等式组 $\begin{cases} 2x + 5 > 4x - 3, \\ x - \frac{2x-5}{3} \geq 1 \end{cases}$ 的解集为_____.

【答案】 $-2 \leq x < 4$

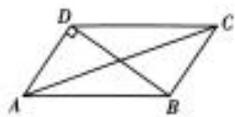
【考点】 解不等式组

【解析】 解不等式①得: $x < 4$

解不等式②得: $x \geq -2$

\therefore 该不等式组的解集为: $-2 \leq x < 4$

13. 如图, 已知平行四边形 ABCD, $AD \perp BD$, $AC = 10, AD = 4$, 则 BD 的长是_____.



第 13 题图

【答案】 6

【考点】 平行四边形的性质

【解析】 \because 四边形 ABCD 是平行四边形, $AC = 10$

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2} AC = 5$$

$$\because AD \perp BD, \quad AD = 4$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOD \text{ 中, 由勾股定理得: } OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\therefore BD = 2OD = 6$$

14. 山西太原万柏林区一线天旅游公路是太原市打造的一条“彩虹路”，每天都会吸引许多骑行爱好者。周日，小宇和小琦参加了某自行车队在该路段组织的骑行活动，小宇从某地出发 5 分钟后，小琦也从同一地点沿同一方向骑行，已知小宇和小琦骑行的平均速度分别为 20 千米 / 小时和 25 千米 / 小时，设小琦骑行 x 小时后追上小宇，则根据题意可列方程为_____。

【答案】 $25x = 20\left(x + \frac{1}{12}\right)$

【考点】一元一次方程的实际应用——追及问题

【解析】小宇的路程为： $20\left(x + \frac{1}{12}\right)$ ，小琦的路程为： $25x$

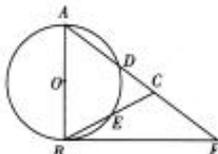
∵两人同地同方向出发，追上时行驶路程相等，

∴方程为： $25x = 20\left(x + \frac{1}{12}\right)$

15.如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 为直径的圆 O 分别交 AC, BC 于点 D, E ，过点 B 作圆 O 的切线与 AC 的延长线交于点 F ，若 $AB = 5$ ， $\sin \angle CBF = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则 BF 的长为_____。



第 14 题图

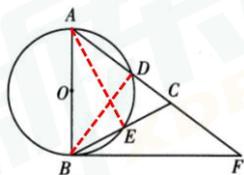


第 15 题图

【答案】 $\frac{20}{3}$

【考点】圆综合

【解析】连接 AE 、 BD



第 15 题图

∵ AB 是直径 ∴ $\angle AEB = 90^\circ$ ， $\angle ADB = 90^\circ$

∵ BF 相切于圆 O ∴ $\angle ABF = 90^\circ$

∴ $\angle ABC + \angle CBF = 90^\circ$ ， $\angle ABC + \angle BAE = 90^\circ$

$$\therefore \angle CBF = \angle BAE$$

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \therefore \sin \angle BAE = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AB=5 \quad \therefore BE=\sqrt{5} \quad \therefore \text{在在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, 由勾股定理得: } AE=2\sqrt{5}$$

$$\therefore AB=AC \quad \therefore BC=2BE=2\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \quad \therefore 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5 \cdot BD \quad \therefore BD=4$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, 由勾股定理得: } AD=3$$

$$\therefore \angle BDA = \angle FBA = 90^\circ, \quad \angle BAD = \angle FAB \quad \therefore \triangle BAD \sim \triangle FAB$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{FB}{AB} \text{ 即 } \frac{4}{3} = \frac{FB}{5} \quad \therefore BF = \frac{20}{3}$$

三. 解答题 (本大题共 8 个小题, 共 75 分)

16. (本题共 2 个小题, 每小题 5 分, 共 10 分) 计算:

$$(1) (3\sqrt{2})^2 - |-4| - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + (-4-2)^0$$

$$(2) \left(1 - \frac{x}{x+3}\right) \div \frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$$

【答案】 见解析

【考点】 有理数运算&分式化简

【解析】

$$\text{解: 原式} = 18 - 4 - 9 + 1$$

$$= 6$$

(2)

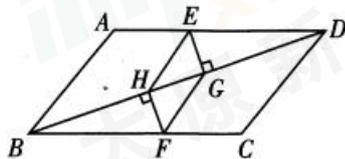
$$\text{解: 原式} = \frac{3}{x+3} \div \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{3}{x+3} \cdot \frac{(x+3)}{x-3}$$

$$= \frac{3}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-3}$$

$$= \frac{3}{x-3}$$

17. (本题 7 分) 如图, 在平行四边形 ABCD 中, 点 E, F 分别是 AD, BC 上的点, 且 $DE = BF$, 分别过点 E, F 作 $EG \perp BD$, $FH \perp BD$, 垂足分别为 G, H, 连接 EH, FG. 请判断四边形 HFGE 的形状并说明理由



【答案】见解析

【考点】平行四边形的判定

【解析】

解: 四边形 HFGE 的形状是平行四边形。

理由如下:

\because 四边形 ABCD 是平行四边形

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$

又 $\because EG \perp BD$, $FH \perp BD$

$\therefore \angle BHF = \angle FHG = \angle EGD = \angle EGH = 90^\circ$

$\therefore EG \parallel FH$

又 $\because \angle BHF = \angle EGD$, $\angle ADB = \angle CBD$, $DE = BF$

$\therefore \triangle BHF \cong \triangle DGE$ (AAS)

$\therefore FH = EG$

又 $\because EG \parallel FH$

\therefore 四边形 HFGE 的形状是平行四边形

18. (本题 6 分) 某学校为了改进全校师生的饮水质量, 需要安装 A 型净水器与 B 型净水器, 已知每台 A 型净水器比 B 型净水器售价贵 2000 元, 且安装 A 型净水器的数量是 B 型净水器数量的 $\frac{4}{5}$, 学校分别购入 A 型与 B 型净水器的费用都是 20 万元. 求每台 A 型净水器和每台 B 型净水器的售价分别为多少元?



【答案】见解析

【考点】有理数运算&分式化简

【解析】

解：设每台 B 型净水器的售价是 x 元，则每台 A 型净水器的售价是 $(x + 2000)$ 元。

$$\frac{200000}{x} \cdot \frac{4}{5} = \frac{200000}{(x + 2000)}$$

解得： $x = 8000$

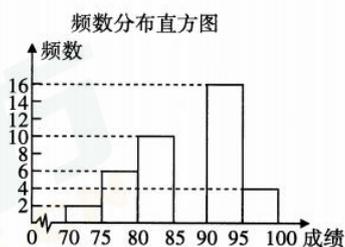
经检验， $x = 8000$ 是原分式方程的解。

$8000 + 2000 = 10000$ (元)

答： 每台 B 型净水器的售价是 8000 元， 则每台 A 型净水器的售价是 10000 元。

19.(本题 10 分)第七次全国人口普查期间，某中学为了提高学生对人口普查的认识，在全校开展了主题为“人口普查，人人有责”的知识竞赛活动，共有 1200 名学生参加了此次赛中国人口善查(满分为 100 分)，学校从中随机抽取了部分参赛学生的成绩，整理并绘制出如下不完整的统计表和统计图，请根据图表信息解答以下问题

组别	分数/分	频数
A	$70 \leq x < 75$	2
B	$75 \leq x < 80$	6
C	$80 \leq x < 85$	10
D	$85 \leq x < 90$	a
E	$90 \leq x < 95$	16
F	$95 \leq x \leq 100$	4



- (1)本次调查随机抽取了_____个参赛学生的成绩;所抽取参赛学生成绩的中位数所在的“组别”是_____;
- (2)补全频数分布直方图;
- (3)估计全校 1200 名学生中， 知识竞赛成绩达到“优秀($90 \leq x \leq 100$)” 的有_____名;
- (4)成绩前四名的学生中有两名男生和两名女生， 若从这四名学生中选两人为该校的人口普查知识宣传员， 求恰好选中一名男生和一名女生的概率。

【解析】

(1) 由扇形统计图可知，C组占20%，C组共10人，所以抽取人数： $10 \div 20\% = 50$ （人）；中位数为第25个人，在D组；

(2) 抽取人数为50人， $50 - 2 - 6 - 10 - 16 - 4 = 12$ （人）；

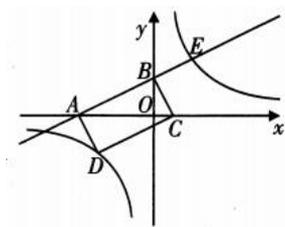
(3) “优秀”部分共有 $16 + 4 = 20$ （人），所以优秀所占比例为 $20 \div 50 = 40\%$ 。故1200人中，“优秀”部分为 $1200 \times 40\% = 480$ （人）；

(4) 设两个男生为A,B，女生为C,D，由树状图可知



共由12种情况，期中一男一女为AC,AD,BC,BD,CA,CB,DA,DB中8种情况，所以概率为 $8 \div 12 = \frac{2}{3}$ 。

20. (本题9分)如图,在平面直角坐标系中直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 分别与x轴y轴交于点A, B, 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 在第一象限交于点E(n, 3), 以线段AB为边作矩形ABCD, 使顶点C在x轴正半轴上, 顶点D在第三象限内



(1) 求k的值；

(2) 求D的坐标，判断点D是否在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上，并说明理由。

【解析】

(1) \because 点D在 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 图像上

$$\therefore 3 = \frac{1}{2} \times n + 2$$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore E \text{ 点坐标为 } (2, 3)$$

$$\therefore 3 = \frac{k}{2}, k = 6$$

(2) 过点 D 作 AC 垂线，交 x 轴与点 F

$\therefore A, B$ 在 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 直线上

$\therefore A(-4, 0) B(0, 2)$

$\therefore OA=4, OB=2$

\therefore 四边形 ABCD 为矩形

$\therefore \angle CBO + \angle ABO = 90^\circ, \angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$

$\therefore \angle CBO = \angle BAO, \angle BOC = \angle AOB = 90^\circ$

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle BOC$

$\therefore C$ 点坐标为 $(1, 0)$

可证 $\triangle ADF \cong \triangle CBO$

故 D 点坐标为 $(-3, -2)$

$\therefore D$ 点在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上

21. (本题8分) 请阅读以下材料并完成相应的任务:

托勒密(Ptolemy)(公元90年—公元168年), 希腊著名的天文学家、地理学家、数学家和光学家, 在数学方面, 他论证了四边形的特性, 即著名的托勒密定理.

托勒密定理:圆内接四边形中, 两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和.

如图1, 已知 $\odot O$ 内接四边形 $ABCD$,

求证: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

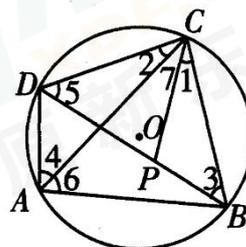


图1

证明:如图1, 在 BD 上取一点 P 连接 CP , 使 $\angle PCB = \angle DCA$, 即使 $\angle 1 = \angle 2$.

\therefore 在 $\odot O$ 中, $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 所对的弧都是 \widehat{CD} ,

$$\therefore \angle 3 = \angle 4$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCP$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BP}$$

$$\therefore AC \cdot BP = AD \cdot BC. \textcircled{1}$$

$$\text{又} \because \angle 2 = \angle 1$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 7 = \angle 1 + \angle 7$$

$$\text{即} \angle ACB = \angle DCP$$

\therefore 在 $\odot O$ 中, $\angle 5$ 与 $\angle 6$ 所对的弧都是 \widehat{BC}

$$\therefore \angle 5 = \angle 6$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle DCP$$

.....

(1)任务一:请你将“托勒密定理”的证明过程补充完整

(2)任务二:如图2, 已知 $Rt \triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$,

$BC = 8$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于点 D , 求 CD 的长.

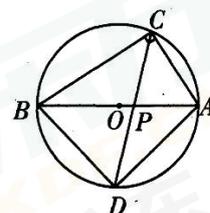


图2

【答案】见解析

【考点】圆周角定理与相似三角形

【解析】(1) $\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DP} \therefore AC \cdot DP = DC \cdot AB$ ②

①与②相加得： $AC \cdot (BP+PD) = AD \cdot BC + AB \cdot CD$

即 $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$

(2) $\because CD$ 平分 $\angle ACB$, $\therefore \angle BCD = \angle ACD$, $\therefore \widehat{BD} = \widehat{AD}$, $\therefore BD = DA$

在 $RT\triangle BCA$ 中, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$.

在 $RT\triangle ADB$ 中, $BD^2 + DA^2 = AB^2$, $\therefore BD = DA = 5\sqrt{2}$.

由托勒密定理得： $CD \cdot AB = CB \cdot AD + AC \cdot BD$

解得 $CD = 7\sqrt{2}$

22. (10分) 综合与实践

问题情境

在综合与实践课上, 数学老师出示了一道思考题如图, 在正方形 $ABCD$ 中, P 是射线 BD 上一动点, 以 AP 为直角边在 AP 边的右侧作等腰直角三角形 APE 使得 $\angle APE = 90^\circ$, $AP = PE$, 且点 E 恰好在射线 CD 上.

独立思考

(1)如图 1, 当点 P 在对角线 BD 上, 点 E 在 CD 边上时, 那么 BP 与 CE 之间的数量关系是_____;

探索发现

(2)当点 E 在正方形 $ABCD$ 外部时, (1)中的结论是否还成立?若成立, 请在图 2 与图 3 中选择一种情况进行证明; 若不成立, 请说明理由;

问题解决

(3)如图 4, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$, 当 P 是对角线 BD 的延长线上一动点时, 连接 BE , 若 $BE = 6\sqrt{2}$, 求 $\triangle BPE$ 的面积.

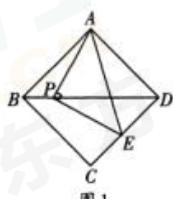


图 1

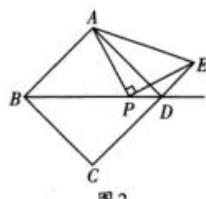


图 2

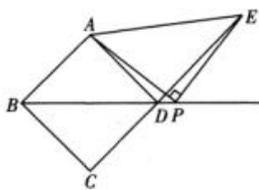


图 3

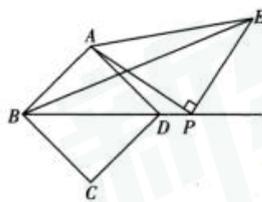


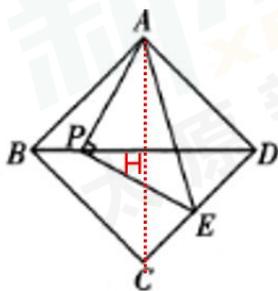
图 4

【答案】(1) $CE = \sqrt{2}BP$ (2) 详见解析 (3) $16 - 4\sqrt{2}$

【考点】正方形的性质；相似的判定与性质；一线三垂直模型；

【解析】

(1) $CE = \sqrt{2}BP$ 理由如下：连接 AC, AC 与 BD 相交于点 H



\because 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = DA \quad \angle ABP = \angle BAC = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ$$

$\because \triangle PAE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle PAE = 45^\circ$$

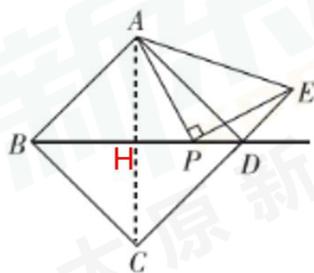
$$\therefore \angle BAH - \angle HAP = \angle EAP - \angle HAP$$

$$\text{即: } \angle PAB = \angle CAE$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle EAC$$

$$\therefore \frac{CE}{BP} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \quad \text{即: } CE = \sqrt{2}BP$$

(2) 结论成立 $CE = \sqrt{2}BP$ 理由如下:



连接 AC, AC 与 BD 相交于点 H

∵ 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore AB=BC=CD=DA \quad \angle ABP=\angle BAC=\angle ACD = \frac{1}{2}\angle BAD=45^\circ$$

∵ $\triangle PAE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle PAE=45^\circ$$

$$\therefore \angle BAH + \angle HAP = \angle EAP + \angle HAP$$

即: $\angle PAB = \angle CAE$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle EAC$$

$$\therefore \frac{CE}{BP} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \quad \text{即: } CE = \sqrt{2}BP$$

(3) 连接 AC, AC 与 BD 相交于点 F, 过点 E 作 $EH \perp BP$ 于点 H

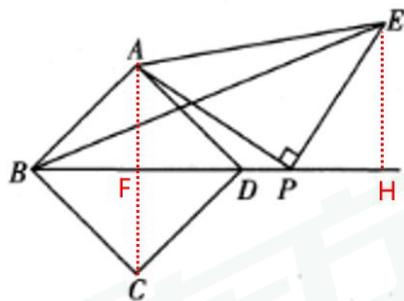


图 4

∵ 四边形 ABCD 是正方形, $AB=2\sqrt{2}$,

$$\therefore AF=BF=DF=2 \quad AC \perp BD$$

∵ $\triangle PAE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \triangle AFP \cong \triangle PHE \quad (\text{AAS})$$

$$\therefore AF=PH=2 \quad FP=HE$$

设 $DP=m$, 则: $FP=HE=2+m$

在 Rt△BEH 中，由勾股定理得：BH²+HE²=BE²

$$\text{即：}(6+m)^2+(2+m)^2=(6\sqrt{2})^2$$

$$\text{化简得：}m^2+8m-16=0$$

$$\text{解得：}m_1=4\sqrt{2}-4, \quad m_2=-4\sqrt{2}-4(\text{舍})$$

$$\therefore S=\frac{1}{2} \cdot BP \cdot EH=\frac{1}{2} (4\sqrt{2}-4+4)(4\sqrt{2}-4+2)=16-4\sqrt{2}$$

23.(本题 13 分)综合与探究

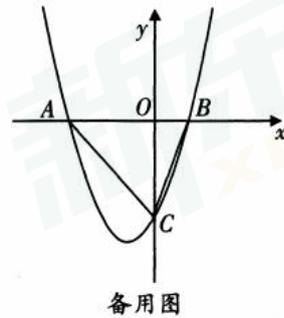
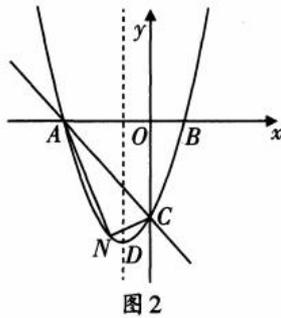
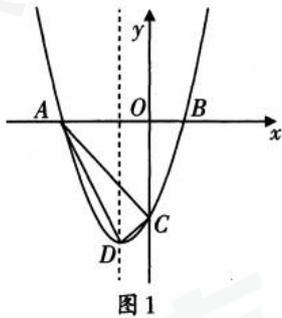
如图 1，已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A, B (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ， $OA = OC = 3$ 。

(1)求抛物线的函数表达式；

(2)判断△ACD 的形状并说明理由；

(3)如图 2， N 是 AC 下方的抛物线上的一个动点，且点 N 的横坐标为 n ，求△CAN 面积 S 与 n 的函数关系式及 S 的最大值；

(4)在抛物线上是否存在一点 N ，使得 $\angle NAB = \angle ABC$ ，若存在，请直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$ (2) 直角三角形 (3) $S = -\frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n$, S 的最大值为 $\frac{27}{8}$ (4) $N(-2, -3), (4, 21)$

【考点】 二次函数综合题

【解析】 (1) $\because OA=OC, \therefore A(-3, 0), C(0, -3)$

将 $A(-3, 0), C(0, -3)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} 0 = 9 - 3b + c \\ -3 = c \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

∴ 抛物线的函数表达式为 $y = x^2 + 2x - 3$

(2) ∵ 抛物线的函数表达式为 $y = x^2 + 2x - 3$

∴ 顶点 D 的坐标为 (-1, -4)

∵ A(-3, 0), C(0, -3)

$$\therefore AC^2 = (-3-0)^2 + (0+3)^2 = 18$$

$$AD^2 = (-3+1)^2 + (0+4)^2 = 20$$

$$CD^2 = (0+1)^2 + (-3+4)^2 = 2$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 + CD^2$$

∴ $\triangle ACD$ 是直角三角形

(3) 如图 2, 过点 N 作 $NM \parallel y$ 轴交 AC 于点 M,

∵ A(-3, 0), C(0, -3)

∴ AC: $y = -x - 3$

∵ N 点的横坐标为 n

$$\therefore N(n, n^2 + 2n - 3)$$

M(n, -n-3)

$$\therefore MN = -n - 3 - (n^2 + 2n - 3) = -n^2 - 3n$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} MN(x_B - x_A) = \frac{1}{2} (-n^2 - 3n) \times 3 = -\frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n$$

$$S = -\frac{3}{2}n^2 - \frac{9}{2}n = -\frac{3}{2} \left[n^2 + 3n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] + \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$$

∴ $a = -\frac{3}{2}$, ∴ 当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, S 有最大值 $\frac{27}{8}$ 。

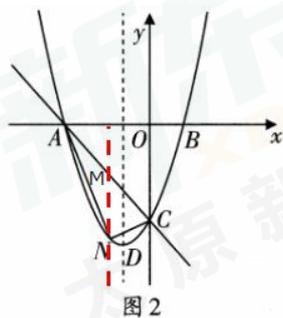


图 2

(4) ∵ 点 N 在二次函数图象上, $\angle NAB = \angle ABC$, 当点 N 在 x 轴下方时

∴ 点 N 与点 C 关于对称轴对称

∴ $N(-2, -3)$

当点 N 在 x 轴上方时, 如图, 过点 N 作 $NP \perp x$ 轴于点 P

∵ $\angle NAB = \angle ABC$

∴ $\tan \angle NAB = \tan \angle ABC$

$$\therefore \frac{n^2 + 2n - 3}{n + 3} = \frac{3}{1}$$

解得: $n = -3$ (舍), $n = 4$

∴ 点 $N(4, 21)$

综上所述: N 点坐标为 $(-2, -3)$, $(4, 21)$.

