秘密★启用前

2021年山西省高考考前适应性测试
文科数学参考答案详解及评分说明

评分说明：

1. 考生如按其他方法或步骤解答，正确的，同样给分；有错的，根据错误的性质，参照评分说明中相应的规定评分.

2. 计算题只有最后答案而无演算过程的，不给分；只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的，不给分.

A卷选择题答案

一、选择题

1. C 【解析】因为 $x^2+x-12<0$，即 $(x+4)(x-3)<0$，解得 $-4<x<3$，所以 $A=\{x|-4<x<3\}$. 所以 $A\cap B=\{x|-4<x<0\}$.

2. C 【解析】$\because z=\dfrac{2}{-1+i}=\dfrac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{2(-1-i)}{2}=-1-i$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$，故选C.

3. B 【解析】$\forall\alpha\in R,\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right),k\in Z$，等价于 $\left(\dfrac{k\pi}{2}-\alpha\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=2n\pi,n\in Z$，$\therefore k=4n+1$，$n\in Z$. 可知"$\forall\alpha\in R,\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,k\in Z$"是"$k=1$"的必要不充分条件.

4. B 【解析】由题意可知，5个三角形的面积从大到小分别是4，4，2，1，1，将它们依次记为A,B,C,D,E，它们的总面积为12，故选出的两个三角形的面积之和不小于6即可保证其不小于另外三个三角形的面积之和，则任取两个的取法共有$AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE$共10种，其中$AB,AC,BC$这3种情况对应的面积之和不小于6，根据古典概率模型的概率计算公式可知，所求概率为$\dfrac{3}{10}$.

5. C 【解析】$\because \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=1+2\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=0$，$\therefore \cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=120^\circ$. 故选C.

6. B 【解析】指数函数 $y=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$ 图象位于x轴上方，据此可区分两函数图象. 二次函数 $y=ax^2-bx=(ax-b)x$，有零点 $\dfrac{b}{a}$，0. A，B选项中，指数函数 $y=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$ 在R上单调递增，故 $\dfrac{b}{a}>1$，故A错误、B正确. C，D选项中，指数函数 $y=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$ 在R上单调递减，故 $0<\dfrac{b}{a}<1$，故C，D错误.

7. B 【解析】观察：

$7\bmod 10=7,7^2\bmod 10=9,7^3\bmod 10=3,7^4\bmod 10=1$，

$7^5\bmod 10=7,7^6\bmod 10=9,7^7\bmod 10=3,7^8\bmod 10=1,\cdots\cdots$

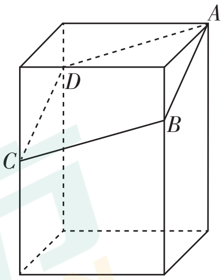
不难归纳出对于$k\in\mathbf{N}$，有 $7^{4k+1}\bmod 10=7,7^{4k+2}\bmod 10=9,7^{4k+3}\bmod 10=3,7^{4k}\bmod 10=1$，

于是可推测 $7^{2022}\bmod 10=9$.

8. B 【解析】不妨设双曲线的焦点在x轴上，

由于$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{3}$，因此，渐近线的倾斜角为$60^\circ$或$120^\circ$，

所以$\alpha=60^\circ$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$，故选B.



（第9题答图）

9. C 【解析】截面如图所示，是一个菱形$ABCD$，棱长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，两条对角线长分别为$2\sqrt{2}$，$\frac{2\sqrt{30}}{3}$，所以面积为$\frac{4\sqrt{15}}{3}$.

10. C 【解析】由题$f(x)$在R上单调递减，故$f'(x)\leqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立.

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-a=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-a=\frac{2}{e^x+e^{-x}+2}-a,$$

因为$e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当$e^x=e^{-x}$，即$x=0$时取等号，

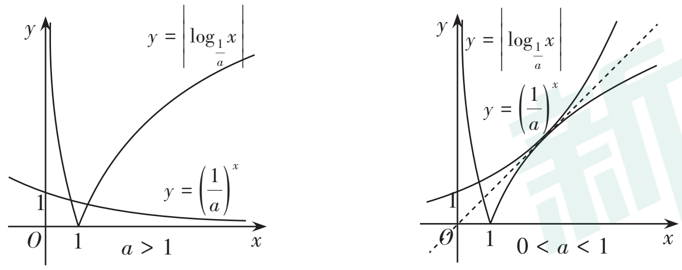
故$f'(x)_{\max}=\frac{2}{2+2}-a=\frac{1}{2}-a\leqslant 0$，$\therefore\ a\geqslant\frac{1}{2}$.

11. D 【解析】设圆锥的底面半径为r，球的半径为R，则由已知得$\frac{\pi r^2}{4\pi R^2}=\frac{2}{9}$，则$r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$

球心到底面的距离为$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}R$，所以圆锥的高为$\frac{4}{3}R$或$\frac{2}{3}R$，得体积比为$\frac{8}{27}$或$\frac{4}{27}$.

12. B 【解析】解法一：$f(x)=0$，得$\left|\log_a x\right|=\frac{1}{a^x}$，即$\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|=\left(\frac{1}{a}\right)^x$. 由题意知函数$y=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$图象与函数$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$图象有两个交点.

当$a>1$时，$y=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$，$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$草图如下，显然有两交点.



（第12题答图）

当$0<a<1$时，函数$y=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$图象与函数$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$图象有两个交点时，注意到$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$，$y=\log_{\frac{1}{a}}x$互为反函数，图象关于直线$y=x$对称，可知函数$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$图象与直线$y=x$相切，设切点横坐标$x_0$，则$\begin{cases}\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}=x_0\\ \left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}\ln\frac{1}{a}=1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x_0=e,\\ a=e^{-\frac{1}{e}}.\end{cases}$

综上，a的取值范围为$\left\{e^{-\frac{1}{e}}\right\}\cup(1,+\infty)$，选B.

解法二：当$a>1$时，符合题意（见解法一）；

当$0<a<1$时，由函数图象可知$g(x)=\left|\log_{\frac{1}{a}}x\right|$与$h(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$在$x\in(0,1)$内有唯一公共点，

于是它们在$(0,+\infty)$上有两个公共点的充要条件是在$x\in(1,+\infty)$上有唯一公共点，

即$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)=\log_{\frac{1}{a}}x$与$h(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$在唯一一点$(m,n)$处有共同的切线，

由$\begin{cases}g(m)=n,\\h(m)=n,\\g'(m)=h'(m),\end{cases}$，得$\begin{cases}\log_{\frac{1}{a}}m=n,\cdots\cdots①\\\left(\frac{1}{a}\right)^m=n,\cdots\cdots②\\\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}=\left(\frac{1}{a}\right)^m\ln\frac{1}{a},\cdots\cdots③\end{cases}$

①即$\left(\frac{1}{a}\right)^n=m$，……④

由②④知，若$m>n$，则$n=\left(\frac{1}{a}\right)^m>\left(\frac{1}{a}\right)^n=m$矛盾，

若$m<n$，则$n=\left(\frac{1}{a}\right)^m<\left(\frac{1}{a}\right)^n=m$矛盾，故只可能$m=n$，

于是$\left(\frac{1}{a}\right)^m=n=m$，……⑥，

⑥代入③，整理得$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}=m\ln\frac{1}{a}$，即$m\ln\frac{1}{a}=1$，$m=\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}$，

代入⑥，得$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}$，取对数，得$\frac{1}{\ln\frac{1}{a}}\cdot\ln\frac{1}{a}=-\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1$，解得$a=e^{-\frac{1}{e}}$.

B卷选择题答案

1. A　2. B　3. B　4. D　5. C　6. A　7. C　8. A　9. C　10. C　11. D　12. D

A、B卷非选择题答案

二、填空题

13. $-\frac{4}{5}$

【解析】由三角函数的定义得$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

14. 2

【解析】由题意，原点O到l_1,l_2的距离为$d=\frac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\therefore\ a=2$.

15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$，5

【解析】根据正弦定理得$\frac{CB}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，所以$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\angle BAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

则$\sin\angle ACB=\sin(\frac{\pi}{4}-\angle BAC)=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

在$\triangle ACD$中，$\cos\angle ACD=\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

又由余弦定理得$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD$

解得$CD=5$或$CD=1$，又因为$\angle D$为锐角，所以$CD=5$.

16. 6

【解析】设AB的方程为$x=my+\frac{p}{2}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则由$\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+\frac{p}{2} \end{cases}$得$y^2-2pmy-p^2=0$,$\therefore\ y_1+y_2=2pm$,$y_1y_2=-p^2$,

$$\therefore\ k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1+\frac{p}{2}}+\frac{y_2}{x_2+\frac{p}{2}}=\frac{y_1}{my_1+p}+\frac{y_2}{my_2+p}=\frac{y_1(my_2+p)+y_2(my_1+p)}{(my_1+p)(my_2+p)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+p(y_1+y_2)}{(my_1+p)(my_2+p)}=\frac{2m(-p^2)+2mp^2}{(my_1+p)(my_2+p)}=0,$$

$\therefore\ \angle AMF=\angle BMF$, $\because\ \tan\angle AMB=\frac{2\tan\angle AMF}{1-\tan^2\angle AMF}=2\sqrt{2}$,又$\angle AMF$为锐角,$\therefore\ \tan\angle AMF=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

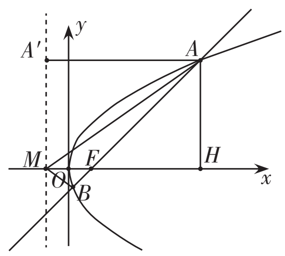
不妨设$AF>BF$,如图,作$AH\perp x$轴,垂足为H,过M作直线$l\perp x$轴,

$AA'\perp l$,垂足为A',则

$\because\ \tan\angle AMF=\frac{AH}{MH}=\frac{AH}{AA'}=\frac{AH}{AF}=\sin\angle AFH$,

$\therefore\ \sin\angle AFH=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore\ \angle AFH=45^\circ$,$\therefore\ m=1$,

$\therefore\ |AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{(1+m^2)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=4p=24$,故$p=6$.



(第16题答图)

三、解答题

17. 解:

(1)选择条件①.

由题意可得:

$a_2=a_1\cdot\left[-\frac{(2-1)(2\times2+1)}{(2+1)(2\times2-1)}\right]=-\frac{5}{6}$; ………… 2分

同法可求$a_3=\frac{7}{12}$; ………… 3分

$a_4=-\frac{9}{20}$; ………… 4分

猜想$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. ………… 6分

选择条件②.

由题意可得:$\frac{a_2}{a_1}=-\frac{(2-1)(2\times2+1)}{(2+1)(2\times2-1)}=-\frac{5}{9}$.

又因为$a_1>0$,$a_1a_2=-\frac{5}{4}$. 两式联立解得$a_1=\frac{3}{2}$,$a_2=-\frac{5}{6}$. ………… 2分

所以$a_3=a_2\cdot\frac{(3-1)(2\times3+1)}{(3+1)(2\times3-1)}=\frac{7}{12}$; ………… 3分

同法可求$a_4=-\frac{9}{20}$; ………… 4分

猜想$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. ………… 6分

(2)由已知$a_1=\frac{3}{2},\frac{a_2}{a_1}=-\frac{1\times5}{3\times3},\frac{a_3}{a_2}=-\frac{2\times7}{4\times5},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=-\frac{(n-1)(2n+1)}{(n+1)(2n-1)},(n\geqslant2)$

得$a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1\times5}{3\times3}\right)\times\left(-\frac{2\times7}{4\times5}\right)\times\cdots\times\left[-\frac{(n-1)(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right],(n\geqslant2)$

即$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)},(n\geqslant2)$. 可验证,当$n=1$时该式也成立,

即猜想正确. ………………………………………………………… 8分

因为$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n+1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$, ………………………… 10分

所以$S_{2n}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}$

$=(1+\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-\cdots-(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1})$

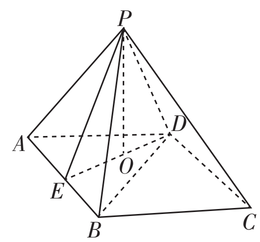
$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$. ………………………………………… 12分

18. **解**:(1)设AB的中点为E,连接PE与DE,

因为$\triangle PAB$是等腰三角形,$PA=PB$,所以$PE\perp AB$,又因为$AB\perp PD$,$PD\cap PE=P$,

所以$AB\perp$平面PED, ………………………………… 2分

则$AB\perp DE$, $\therefore BD=AD=\sqrt{2}$, $\because AB=2$,所以$\triangle ABD$是等腰直角三角形,且$BD\perp AD$. ………………………………… 6分



(第18题答图)

(2)由(1)可知$AB\perp$平面PED,即平面$PED\perp$平面ABD, ……………… 7分

又因为$PC=\sqrt{5}$,$CD\,/\!/\,AB$, $\therefore CD\perp PD$, $\therefore PD=1$, ……………… 9分

又$PE=DE=1$, $\therefore$ $\triangle PDE$为正三角形.

设DE的中点为O,则$PO\perp$平面$ABCD$,且$PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则$S_{底面}=AB\cdot DE=2$, ………………………………………… 11分

所以四棱锥$P-ABCD$的体积为$V=\frac{1}{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12分

19. **解**:(1)根据频率分布直方图各小长方形面积之和为1,结合题意,得

$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)\times10m+0.2+0.15+0.05=1$,即$m=0.032$; ……………… 3分

(2)由频率分布直方图可知,样本数据的平均值可估计为

$35\times0.04+45\times0.08+55\times0.16+65\times0.32+75\times0.20+85\times0.15+95\times0.05=67.1$,

故此次笔试的平均成绩可估计为67.1分; ………………………………… 6分

(3)根据题意,录取率为$\frac{600}{2000}=0.3$,故应录取成绩最高的30%的报名者,

根据频率直方图可知,80~100分及以上占总体的比例可估计为20%,

70~100分及以上占总体的比例可估计为40%,

故录取分数线在70~80之间,

设录取分数线为x,则$\frac{80-x}{80-70}\times0.2+0.15+0.05=0.3$,解得$x=75$,

故该公司招聘的录取分数线可估计为75分. ………………………………… 12分

20. **解**：(1) $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有定义.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-(2a+1)=\dfrac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\dfrac{(x-1)(2ax-1)}{x}$. ………………………… 2分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减； ………………… 3分

当 $a\neq 0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $\dfrac{1}{2a}$.

由题 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调，只需 $\dfrac{1}{2a}\leqslant 1$，解得 $a<0$，或 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$. ………………………… 4分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………… 5分

(2) 由 (1) 得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有极小值，必有 $0<a<\dfrac{1}{2}$，此时 $\dfrac{1}{2a}>1$. ………………………… 6分

令 $f'(x)<0$，得 $1<x<\dfrac{1}{2a}$；令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，或 $x>\dfrac{1}{2a}$，

故 $f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………………… 7分

故 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{1}{2a}$ 处取得极小值 $f(x_0)=\ln x_0+ax_0^2-(2a+1)x_0=\ln x_0+\dfrac{1}{2x_0}\cdot x_0^2-\left(\dfrac{1}{x_0}+1\right)x_0=\ln x_0-\dfrac{x_0}{2}-1$.

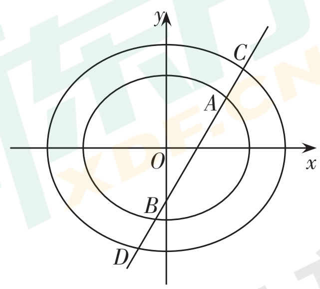
………………………………………………………… 9分

记 $h(x)=\ln x-\dfrac{x}{2}-1\ (x>1)$，$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-x}{2x}$，令 $h'(x)>0$，得 $1<x<2$；令 $h'(x)<0$，得 $x>2$，故 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 11分

$\therefore\ h(x)_{\max}=h(2)=\ln 2-2$，故该极小值的最大值为 $\ln 2-2$. ………………………… 12分

21. **解**：(1) 设椭圆 C_2 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦距为 $2c$，则由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2b^2}{a}=3\sqrt{2},\\ c^2=a^2+b^2.\end{cases}$$ ………………………… 2分



(第21题答图)

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，因此 C_2 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ………………… 5分

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=\lambda,\\ y=\sqrt{3}x+m,\end{cases}$ 得 $15x^2+8\sqrt{3}mx+4m^2-12\lambda=0(\lambda=1$ 或 $2)$，

$\because\ l$ 与 C_1，C_2 相交，只需当 $\lambda=1$ 时 $\Delta>0$，$\therefore -\sqrt{15}<m<\sqrt{15}$. ………………………… 7分

又 $\because\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}=-\dfrac{4\sqrt{3}m}{15}$，$\therefore\ AB$ 与 CD 的中点相同，则 $|AC|=\dfrac{|CD|-|AB|}{2}$， ………………… 9分

$\therefore\ |AC|=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(|x_3-x_4|-|x_1-x_2|\right)$

$$=\frac{\sqrt{4\times 8\times 6(30-m^2)}}{30}-\frac{\sqrt{4\times 4\times 3(15-m^2)}}{15}$$ ………………………… 11分

$$=\frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{30-m^2}-\sqrt{15-m^2}\right)}{15}=\frac{4}{5}$$

解得 $m=\pm\sqrt{3}$，此时 $\Delta>0$，故 $m=\pm\sqrt{3}$. ………………………… 12分

选考题

22. **解**:(1)由$\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho\sin\theta = y$,

又$\rho^2 = \dfrac{4}{3 - \cos 2\theta} = \dfrac{4}{2 + 2\sin^2\theta}$,即$2\rho^2 + 2\rho^2\sin^2\theta = 4$,

得$2x^2 + 4y^2 = 4$,即C的直角坐标方程为:$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$. …………………………………………………… 4分

(2)将$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} + t\cos\alpha \\ y = -\dfrac{7}{3} + t\sin\alpha \end{cases}$代入$C$:$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$有$\left(-\dfrac{4}{3} + t\cos\alpha\right)^2 + 2\left(-\dfrac{7}{3} + t\sin\alpha\right)^2 = 2$,

化简得$(3\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha)t^2 - 4(2\cos\alpha + 7\sin\alpha)t + 32 = 0$,

设A,B两点对应的参数分别为t_1,t_2,则

$t_1 + t_2 = \dfrac{4(2\cos\alpha + 7\sin\alpha)}{3\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha}$, $t_1t_2 = \dfrac{32}{3\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha}$. …………………………………………………… 6分

由$\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$得$t_1 = 2t_2$, $\dfrac{(t_1 + t_2)^2}{t_1t_2} = \dfrac{t_1}{t_2} + \dfrac{t_2}{t_1} + 2$, …………………………………………………… 8分

因此$\dfrac{(2\cos\alpha + 7\sin\alpha)^2}{6\cos^2\alpha + 12\sin^2\alpha} = \dfrac{9}{2}$即$5\tan^2\alpha - 28\tan\alpha + 23 = 0$,

解得$\tan\alpha = \dfrac{23}{5}$或1,经检验此时$\Delta > 0$,故直线$l$的方程为$x - y - 1 = 0$或$69x - 15y + 57 = 0$. ………… 10分

23. **解**:(1)$f(x) = |3x - 1| + 2|x - 3| = \begin{cases} 5x - 7, x \geqslant 3, \\ x + 5, \dfrac{1}{3} \leqslant x < 3, \\ -5x + 7, x < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ ………………… 2分

当$x \geqslant 3$时,函数$f(x)$单调递增,并且$f(x) \geqslant 8$;

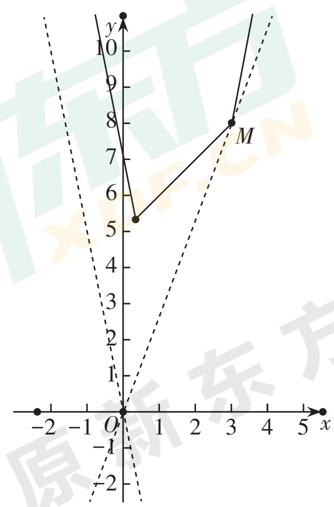
当$\dfrac{1}{3} \leqslant x < 3$时,函数$f(x)$单调递增,并且$f(x) \geqslant \dfrac{16}{3}$;

当$x < \dfrac{1}{3}$时,函数$f(x)$单调递减,并且$f(x) > \dfrac{16}{3}$.

综上当$x > \dfrac{1}{3}$时,函数$f(x)$单调递增,

当$x < \dfrac{1}{3}$时,函数$f(x)$单调递减.且$f(x) \geqslant \dfrac{16}{3}$. ………………………… 4分

要使关于x的方程$|3x - 1| + 2|x - 3| = a$有两个不同的根,则a的取值范围$\{a|a > \dfrac{16}{3}\}$. ………………………………………………………………… 5分



(第23题答图)

(2)因为$f(3) = 8$,记点$M(3,8)$,坐标原点为$O(0,0)$,

则直线OM的斜率为$k = \dfrac{8}{3}$. …………………………………………………………………… 7分

当直线$y = bx$的斜率$b < -5$,或$b \geqslant \dfrac{8}{3}$时,该直线与函数$f(x) = |3x - 1| + 2|x - 3|$的图象相交. ………… 9分

因为不等式$f(x) \leqslant bx$的解集非空,所以b的取值范围是$\{b|b < -5$,或$b \geqslant \dfrac{8}{3}\}$. ……………………… 10分