太原市 2021 年高三年级模拟试题（一）

文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\},A=\{2,3\},B=\{1,3,5\}$，则 $A\cup(C_U B)=$

$A.\{2,3,4\}$　　$B.\{2\}$　　$C.\{1,5\}$　　$D.\{1,3,4,5\}$

考点：集合的运算

解析：$C_U B=\{2,4\}$，所以 $A\cup(C_U B)=\{2,3,4\}$

答案：A

2. 已知复数 z 满足 $z(1-i)=2i$，则复数 $z=$

$A.1-i$　　$B.1+i$　　$C.-1-i$　　$D.-1+i$

考点：复数除法运算

解析：$z=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$

答案：D

3. 公元前 6 世纪，古希腊毕达哥拉斯学派在研究正五边形和正十边形的作图时，发现了黄金分割数 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，其近似值为 0.618，这是一个伟大的发现，这一数值也表示为 $a=2\sin 18^{\circ}$，若 $a^2+b=4$，则 $\dfrac{a^2b}{1-\cos 72^{o}}=$

$A.\dfrac{1}{2}$　　$B.2$　　$C.\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　$D.4$

考点：三角函数的恒等变换，二倍角公式

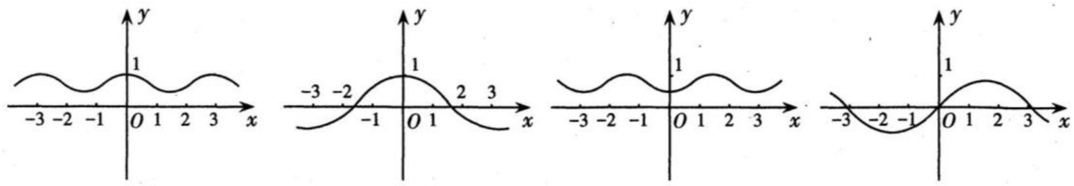
解析：

$$a^2=4\sin^2 18^{o},b=4-a^2=4-4\sin^2 18^{o}=4\cos^2 18^{o},$$

$$\frac{a^2b}{1-\cos 72^{o}}=\frac{4\sin^2 18^{o}\cdot 4\cos^2 18^{o}}{1-\left(1-2\sin^2 36^{o}\right)}=\frac{2\left(1-\cos 36^{o}\right)\cdot 2\left(1+\cos 36^{o}\right)}{2\sin^2 36^{o}}=2$$

答案：B

4. 函数 $f(x)=\cos(\sin x)$ 的部分图像大致是



A B C D

考点：函数的图像

解析：$f(0)=1,$ 所以排除 C,D　$f(2)>0,$ 排除 B

答案：A

5. 在区间 $[-1,1]$ 上任取一个实数 k，则使得直线 $y=kx$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点的概率是

$A.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$B.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$C.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$D.\dfrac{1}{2}$

考点：直线和圆的位置关系，几何概型

解析：圆心到直线的距离 $d=\dfrac{2k}{\sqrt{k^2+1}}\le 1,$ 所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$p=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

答案：C

6.已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量，且满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$，则 $|2\vec{a}+\vec{b}|=$ (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

考点：平面向量运算

答案：C

解析：$\left(|\vec{a}-\vec{b}|\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1-2\cos\theta$，得 $\cos\theta=0$，同理可得：

$\left(\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=4\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=4+1+4\cos\theta=5$，故选 C

7.已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且 $\{S_n\}$ 是等差数列，则下列结论错误的是（　　）

A. $\{a_n+S_n\}$ 是等差数列

B. $\{a_n\cdot S_n\}$ 是等比数列

C. $\{a_n^{\ 2}\}$ 是等差数列

D. $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列

考点：等差等比数列性质

答案： B

解析：设 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}(a_1>0,q>0)$，且 $2S_2=S_1+S_3=2a_1q=a_1+a_1q^2$，得 $q=1$，所以 $a_n=a_1,S_n=na_1$，故 $a_n\cdot S_n=na_1^{\ 2}$，为等差数列，故选 B

8.已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}3x+y-3\geq 0\\2x+3y-9\leq 0\\x-2y-1\leq 0\end{cases}$，则 $z=\frac{2x+y-3}{x-2}$ 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,1]\cup(2,4]$

B. $[1,2)\cup(2,4]$

C. $[1,2)\cup[4,+\infty)$

D. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

考点：线性规划

答案： D

解析： $z=\frac{2x+y-3}{x-2}=\frac{2(x-2)+y+1}{x-2}=2+\frac{y+1}{x-2}$，所以 $y+1=(x-2)(z-2)$，可看成是过点 $(2,-1)$ 的直线的斜率的取值范围，画出可行域，可知选 D

9.已知 $a=4\ln 3^{\pi},b=3\ln 4^{\pi},c=4\ln\pi^3$，则下列结论正确的是（　　）

A. $b<c<a$

B. $c<b<a$

C. $b<a<c$

D. $a<b<c$

考点：指数对数运算

答案： A

解析： $a=4\ln 3^{\pi}=\ln 3^{4\pi}, b=3\ln 4^{\pi}=\ln 4^{3\pi}, c=4\ln \pi^{3}=\ln \pi^{12}$ ， $4^{3\pi}=(2^{\frac{\pi}{2}})^{12}, 2^{\frac{\pi}{2}}<\pi^{2}\ \therefore (2^{\frac{\pi}{2}})^{12}<\pi^{12}$

$3^{4\pi}=(3^{\frac{\pi}{3}})^{12}, 27^{\pi}>\pi^{3}$所以 $4^{3\pi}<\pi^{12}<3^{4\pi}$可知选 A

10.已知正四面体 $ABCD$的棱长为 4，点 E在棱 AB上，且 $BE=3AE$，过 E作四面体 $ABCD$外接球的截面，则所作截面面积的最小值为（　　）

A. $\frac{10\pi}{3}$　　　　B. 3π

C. $\frac{\pi}{3}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

考点：三棱锥外接球

答案： B

解析：外接球半径为 r，球心到三棱锥底面距离为 h则有 $\frac{10\pi}{3}$ $r+h=\sqrt{4^{2}-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^{2}}$ ，$r^{2}-h^{2}=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^{2}$，

可得 $r=\sqrt{6}$，当截面与 OE垂直时面积最小，由勾股可得最小截面半径为 $\sqrt{OA^{2}-OE^{2}}=\sqrt{3}$故选 B

11.已知过抛物线 $y^{2}=2px(p>0)$的焦点 $F(\frac{1}{2},0)$ 的直线交抛物线于 A,B两点，若 ΔAOF的面积与 ΔBOF的面积之比是 2，则 $|AB|=$

A. $\frac{9}{4}$　　B. $\frac{13}{4}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{7}{4}$

考点：直线与抛物线的位置关系

答案：A

解析： $\because \frac{S_{\Delta AOF}}{S_{\Delta BOF}}=2\Rightarrow\frac{|AF|}{|BF|}=2\Rightarrow x_{1}+\frac{p}{2}=2(x_{2}+\frac{p}{2})$　　$\because F(\frac{1}{2},0)\Rightarrow p=1$

由抛物线性质可得： $x_{1}\cdot x_{2}=\frac{p^{2}}{4}=\frac{1}{4}$　　$\therefore x_{1}+x_{2}=\frac{5}{4}\Rightarrow|AB|=x_{1}+x_{2}+p=\frac{9}{4}$　　故选 A

12.已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0.0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的图像关于 $x=-\frac{\pi}{3}$对称，且 $f(\frac{\pi}{6})=0$，将函数 $f(x)$的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$个单位得到 $g(x)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

B.若 $g(x)$是奇函数，则 ω的最小值是 1

C.若 $f(x)$在 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$上单调递增，则 $\omega\in(0,\frac{2}{3}]$

D.若 $g(x)$是周期最大的偶函数，则 $f(x)$在 $[0,\frac{\pi}{16}]$上单调递增

考点：三角函数性质及应用

答案：D

解析：由已知可得 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\phi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\\ \frac{\pi}{6}\omega+\phi=k\pi,k\in Z\end{cases}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},k\in Z$ 所以 A 错；

$g(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega)$是奇函数，则 $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega=k\pi,k\in Z$ 此时 $\omega=1$不成立，所以 B 错；

若 $f(x)$在 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$上单调递增，则 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ ，此时 $\omega\in(0,\frac{2}{3}]\cup[4,\frac{14}{3}]$，所以 C 错；

$g(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega)$是偶函数，则 $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$ 此时 $\omega=2$，D 选项成立

二、填空题：(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13.函数 $f(x)=(x-1)e^x$的图像在点 $(0,f(0))$处的切线方程为__________.

考点：导数的几何意义

答案： $y=-1$

解析：函数 $f(x)=(x-1)e^x$求导得 $f'(x)=xe^x$，所以切线斜率 $k=f'(0)=0$，又 $f(0)=-1$，

所以切线方程为 $y-(-1)=0(x-0)$，即 $y=-1$

14.某公司初级、中级和高级职称的职工人数恰好组成一个公比为 q的等比数列，现采用分层抽样从全体职工中随机抽取 130人进行一项活动，已知被抽取的高级职工人数为 10，则被抽取的初级职工的人数为__________.

考点：分层抽样

答案： 90

解析：设初级职称职工人数为 a，由题意知初、中、高职工人数成等比数列

则中级职称职工人数为 aq，高级职称职工人数为 aq^2

所以高级职称职工人数 $aq^2=10$，样本总人数为 $a+aq+aq^2=130$

所以 $q=\frac{1}{3}$， $a=90$，即被抽取的初级职工的人数为 90

15.已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边， $3c\sin A=4b\sin C,\cos C=\frac{2}{3}$，点 D 在线段 AB 上，且 $BD=2DA$，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{5}$，则 $a=$_____， $CD=$_______

考点：解三角形

答案： $a=4,CD=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

解析：由 $3c\sin A=4b\sin C$，可得 $3a=4b,b=\frac{3}{4}a$

$\because \cos C=\frac{2}{3},\therefore \sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\because S_{\triangle ABC}=2\sqrt{5},\therefore \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$

$\therefore ab=12,a=4$

$\because \cos C=\frac{2}{3},\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=25-16=9$

$\therefore c=3$

$\because b=\frac{3}{4}a,\therefore b=3=c,\therefore \cos B=\cos C=\frac{2}{3}$

在 $\triangle CBD$中，$CD^2=BD^2+CB^2-2BD\bullet CB\cos B=\frac{28}{3}$

$\therefore CD=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

16.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点是 F，过原点倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与椭圆交于 M,N 两点，若 $\angle MFN=\frac{2\pi}{3}$，则椭圆的离心率是 ______

考点：椭圆的性质

答案： $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

解析：设左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，点 $M(x_0,y_0)$

因为直线过原点且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，由此可得 $y_0=\sqrt{3}x_0$

$$S_{\triangle MF_1F_2}=\sqrt{3}cx_0=b^2\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}b^2,\therefore x_0=\frac{b^2}{3c}\qquad(1)$$

因为点 M 在椭圆上，所以有：$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{\sqrt{3}x_0^{\ 2}}{b^2}=1\qquad(2)$

因为 $a^2+b^2=c^2$，所以，联立 $(1)\ (2)$ 可得：$e^4-14e^2+4=0$

所以 $e=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}(n\in N^*)$,再从下面条件①与②中任选一个作为已知条件,完成以下问题:

（1）证明:$\{b_n\}$ 是等比数列;

（2）求数列 $\{nb_n\}$ 的前项和 T_n .

条件①：$a_1=\frac{3}{2},4S_n+2a_{n+1}=3^{n+1}(n\in N^*)$;条件② $a_1=a_2=\frac{3}{2},a_{n+2}=a_n+2\times3^n(n\in N^*)$.

答案:（1）见解析　（2）$T_n=\frac{3}{4}\times\left[(2n-1)\times3^n+1\right]$.

解析：选条件①

（1）证明：当 $n=1$ 时，$4S_1+2a_2=3^2,\because S_1=a_1=\frac{3}{2},\therefore a_2=\frac{3}{2},\therefore b_1=a_1+a_2=3,$

当　$n\geq1$ 时,$\because 4S_n+2a_{n+1}=3^{n+1}$①,$\therefore 4S_{n+1}+2a_{n+2}=3^{n+2}$②,

②−①　得 $a_{n+2}+a_{n+1}=3^{n+1}$，$b_n=a_n+a_{n+1}=3^n(n\geq1)$.

$\therefore\{b_n\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列;

（2）由（1）得，$b_n=3^n(n\in N^*)$，

$\therefore T_n=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n$③，

③×3得 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+n\times3^{n+1}$④

③-④得 $-2T_n=3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n-n\times3^{n+1},\therefore T_n=\frac{3}{4}\times\left[(2n-1)\times3^n+1\right]$.

选条件②

（1）证明：由 $a_{n+2}=a_n+2\times3^n\left(n\in N^*\right)$得 $a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}+a_n+2\times3^n$，

$\because b_n=a_n+a_{n+1}\left(n\in N^+\right),\therefore b_{n+1}=b_n+2\times3^n,\therefore b_{n+1}-3^{n+1}=b_n-3^n\left(n\in N^+\right)$,

$\therefore b_n-3^n=b_1-3=0,\therefore b_n=3^n\left(n\in N^*\right)$.

$\therefore\{b_n\}$是以3为首项3为公比的等比数列;

（2）同上.

18.（本小题满分12分）

某地区为了实现产业的转型发展，利用当地旅游资源丰富多样的特点，决定大力发展旅游产业，一方面对现有旅游资源进行升级改造，另一方面不断提高旅游服务水平.为此该地区旅游部门，对所推出的报团游和自助游项目进行了深入调查，下表是该部门从去年某月到该地区旅游的游客中，随机抽取的100名游客满意度调查表.

满意度	老年人		中年人		青年人	
	报团游	自助游	报团游	自助游	报团游	自助游
满意	12	1	18	4	15	6
一般	2	1	6	4	4	12
不满意	1	1	6	2	3	2

（1）由上表中的数据分析，老年人，中年人和青年人这三种人群中，哪一类人更倾向于选择报团游？

（2）为了提高服务水平，该旅游部门要从上述样本里满意度为“不满意”的自助游游客中，随机抽取2人征集改造意见，求这2人中有老年人的概率.

（3）若你朋友要到该地区旅游，根据上表中的数据，你会建议他选择那种旅游项目？

考点：概率统计的相关计算

解析：(1）由表中数据可知，

老年人中，接受调查的有18人，其中倾向于报团游的共有15人，故老年人选择报团游的概率为 $p_1=\frac{5}{6}$；

中年人中，接受调查的有40人，其中倾向于报团游的共有30人，故中年人选择报团游的概率为 $p_2=\frac{3}{4}$；

青年人中，接受调查的有42人，其中倾向于报团游的共有22人，故青年人选择报团游的概率为 $p_3=\frac{11}{21}$；

因为 $p_1>p_2>p_3$

所以，老年人更倾向于选择报团游.

（2）由题意得满意度为“不满意”的自助游人群中，老年人有1人，记为 a；中年人有2人，记为 b,c；青年人有2人，记为 d,e.

从中随机选取两人，其基本事件为：$(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e).(c,d),(c,e),(d,e)$，共10个；

其中所求事件“这两人中有老年人”为：$(a,b),(a,c),(a,d),(a,e)$，共4个；

故这两人中有老年人的概率为 $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

（3）由上表可知，报团游的满意率为 $p_4=\frac{12+18+15}{15+30+22}=\frac{45}{67}$

自助游的满意率为 $p_5=\frac{1+4+6}{3+10+20}=\frac{1}{3}$

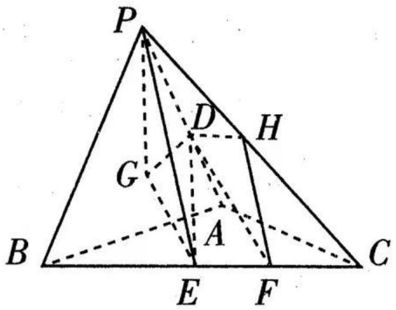
因为 $p_4>p_5$，故建议他选择报团游.

(答案不唯一，言之有理即可给分)

19. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，ΔPAB 是正三角形，G 是 ΔPAB 重心，D、E、H分别是 PA,BC,PC 的中点，点 F 在 BC 上，且 $BF=3FC$.

(1)求证：平面 DFH//平面 PGE；

(2)若 $PB\perp AC$，$AB=AC=2,BC=2\sqrt{2}$，求三棱锥 $P-DEG$ 的体积．



(1)证明：连 BG，依题意，B、G、D三点共线，且 $BG=2GD$，

$\because E$是 BC 的中点，$BF=3FC$，$\therefore F$ 是 CE 的中点，

$\therefore \dfrac{BG}{GD}=\dfrac{BE}{EF}=2,\therefore GE//DF,\therefore DF//$平面 PGE，

$\because H$是 PC 的中点，$\therefore FH//PE,\therefore FH//$平面 PGE，

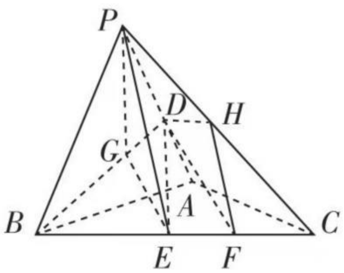
$\because DF\cap FH=F,\therefore$平面 DFH //平面 PGE

(2) $\because AB=BC=2,\mathrm{BC}=2\sqrt{2},\therefore AB^2+AC^2=8=BC^2,\therefore AB\perp AC$，

$\because PB\perp AC,AB\cap PB=B,\therefore AC\perp$平面 PAB，

$\because \Delta PAB$是正三角形，$\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}$，

$\therefore V_{P-DEG}=V_{E-PDG}=\dfrac{1}{3}V_{E-PDB}=\dfrac{1}{6}V_{E-PAB}=\dfrac{1}{12}V_{C-PAB}=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot AC=\dfrac{\sqrt{3}}{18}$



20.已知函数 $f(x)=\cos x+x\sin x$。

(1) 讨论 $f(x)$在 $[-2\pi,2\pi]$上的单调性；

(2)求函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}x^2-1$零点的个数。

答案：

(1) 在 $\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$、$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$和$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上单调递减，在$\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$、$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上单调递增。

(2) 3

解析：$\because f(-x)=\cos(-x)-x\sin(-x)=\cos x+x\sin x=f(x),x\in R$

(1) $\because f(-x)=\cos(-x)-x\sin(-x)=\cos x+x\sin x=f(x),x\in R$

$\therefore f(x)$是 R 上的偶函数，也是$[-2\pi,2\pi]$上偶函数

当 $x\in[0,2\pi]$时，$f'(x)=x\cos x$

令 $f'(x)\geq 0$，则 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$；令 $f'(x)<0$，则 $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$

$\therefore f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减

$\because f(x)$是偶函数$\therefore f(x)$在$\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$和$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上单调递减，在$\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

综上所述，$f(x)$在$\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$、$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$和$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上单调递减，在$\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$、$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上单调递增。$\therefore g(x)$

(2)由(1)得 $g(-x)=f(-x)-\frac{1}{4}(-x)^2-1=g(x)$，$\therefore g(x)$为 R 上的偶函数

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$g'(x)=x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$

令 $g'(x)>0$，则 $0<x<\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$；令 $g'(x)<0$，则 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$

$\therefore g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$上单调递减

$\because g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g(0)=0,g\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\times\left(\frac{5\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2}<0,g(2\pi)=-\pi^2<0$

$\therefore g(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{3}\right)$上有一个零点，$\therefore g(x)$在$[0,2\pi]$上有两个零点 $x\in(2\pi,+\infty)$

当 $x\in(2\pi,+\infty)$时，$g(x)=\cos x+x\sin x-\frac{1}{4}x^2-1\leq x-\frac{1}{4}x^2<0$

$\therefore g(x)$在 $x\in(2\pi,+\infty)$上没有零点。

又$\because g(x)$是偶函数

$\therefore g(x)$在 R上有 3个零点。

21. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别是 F_1,F_2 ，其离心率是 $\frac{1}{2}$ ，点 P是椭圆上的一动点，ΔPF_1F_2 内切圆面积的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

(1) 求椭圆的方程

(2) 直线 PF_1,PF_2 与椭圆 C 分别相交于 A,B，求证：$\frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}$ 为定值。

考点：圆锥曲线与直线的综合

解析：(1)由题意可知 ΔPF_1F_2 内切圆面积的最大值为 $\frac{\pi}{3}$，所以最大半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(2a+2c)\frac{\sqrt{3}}{3}=bc\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 计算得 $a=2,b=\sqrt{3}$ ，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)设 $P(x_0,y_0),A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$

当 $y_0\neq 0$ 时，直线 PF_1,PF_2 与的直线方程分别为 $x=m_1y-1,x=m_2y+1$

由 $\begin{cases}x=m_1y-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m_1^2+4)y^2-6m_1y-9=0$ 所以 $y_0y_1=-\frac{9}{3m_1^2+4}$

因为 $x_0=m_1y_0-1$ ，所以 $m_1=\frac{x_0+1}{y_0}$ ，及 $\frac{y_0}{y_1}=-\frac{5+2x_0}{3}$

同理可得 $\frac{y_0}{y_2}=-\frac{5-2x_0}{3}$

$\frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=-\frac{y_0}{y_1}-\frac{y_0}{y_2}=\frac{10}{3}$

当 $y_0=0$ 时，直线 PF_1,PF_2 与 x 轴重合，容易得到 $\frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

综上所述 $\frac{|PF_1|}{|F_1A|}+\frac{|PF_2|}{|F_2B|}=\frac{10}{3}$

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

22.(本小题满分 10 分)【选修 4-4；坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y=t-\frac{1}{t} \end{cases}$（ t 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

（1） 求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2） 已知点 $P\left(3,\sqrt{3}\right)$，曲线 C_1 与 C_2 相交于 A,B 两个不同点，求 $\left||PA|-|PB|\right|$ 的值。

解析：（1）将 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y=t-\frac{1}{t} \end{cases}$ 的参数 t 消去得曲线 C_1 的普通方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$,

$\because \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$, $\therefore \rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=0$

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$,可得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y=0$;

（2）由题意得点 $P\left(3,\sqrt{3}\right)$ 在曲线 C_2 上，其参数方程可表示为 $\begin{cases} x=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t \end{cases}$,（ t 为参数）

将上述参数方程代入 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 得 $11t^2+44\sqrt{3}t+4\times 29=0$ ，

$\therefore t_1+t_2=-4\sqrt{3}, t_1t_2=\frac{4\times 29}{11}$

$\therefore \left(\left||PA|-|PB|\right|\right)^2=\left(|PA|+|PB|\right)^2-4|PA||PB|=\left(t_1+t_2\right)^2-4t_1t_2=\frac{64}{11}$ ，

$\therefore \left||PA|-|PB|\right|=\frac{8\sqrt{11}}{11}$

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=\left|x+\frac{2}{m}\right|+|x-m|\,(m>0)$.

（1）当 $m=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若存在 $x\in(0,1)$，使得不等式 $f(x)\le 3$ 成立，求实数 m 的取值范围.

答案：（1） 3 （2） $m\in[1,2]$

解析：（1）当 $m=1$时，$f(x)=|x+2|+|x-1|$

$$f(x)=|x+2|+|x-1|\ge|x+2-(x-1)|=3$$

所以函数 $f(x)$的最小值为 3

（2）$f(x)=\left|x+\frac{2}{m}\right|+|x-m|(m>0)$.若存在 $x\in(0,1)$，则 $x+\frac{2}{m}>0$

① 若 $m\ge1$，$f(x)=x+-x=\frac{2}{m}+m\le3$，则 $1\le m\le2$

② 若 $0<m<1$，$f(x)=\begin{cases}2x+\frac{2}{m}-m,\ x\ge m\\ \frac{2}{m}+m, x<m\end{cases}$

当 $f(x)=2x+\frac{2}{m}-m$时，$f(x)\le3$，即 $2x+\frac{2}{m}-m\le3$，$2x\le3+m-\frac{2}{m}$由存在性可得 $2m\le3+m-\frac{2}{m}$，解得 $1\le m\le2$（舍）

当 $f(x)=\frac{2}{m}+m$时，$f(x)\le3$，解得 $1\le m\le2$（舍）

所以综上所述 $m\in[1,2]$