太原市2021年高三年级模拟考试（三）

数学试题（文）参考答案及评分标准

一．选择题： B C A A D D B C A C B A

二．填空题： 13. 0.6　　14. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　　15. $[-1,3]$　　16. 1

三．解答题：

17.（Ⅰ）解：在 ΔPBC 中，由正弦定理得 $\dfrac{PB}{\sin\gamma}=\dfrac{BC}{\sin(\beta-\gamma)}$，　　………3 分

$\therefore PB=\dfrac{BC\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}=\dfrac{85\cdot\sin 45°}{\sin(60°-45°)}=85(\sqrt{3}+1)$ m；　　………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $PB=85(\sqrt{3}+1)$，$\because \angle APB=180°-\alpha-\beta=90°$，$\angle PAB=30°$，

$\therefore AB=2PB=170(\sqrt{3}+1)$，　　………10 分

$\therefore DE=AB-AD-BE=170(\sqrt{3}+1)-100-34\approx 330$ m.　　………12 分

18. 解:（Ⅰ）由题意得该市区 100 天中空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的天数分别是 36, 20, 20, 24,
所以该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率估计值分别为 0.36, 0.20, 0.20, 0.24；……4 分

（Ⅱ）由题意可得 2×2 列联表如下：

SO_2的浓度 / 空气质量等级	$[0,150]$	$(150,475]$
空气质量好	46	10
空气质量不好	24	20

………8 分

（Ⅲ）假设该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度没有关系，　　………9 分

则 $k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(46\times20-10\times24)^2}{56\times44\times70\times30}\approx 8.936>6.635$，

所以有 99% 的把握认为该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度有关.　　………12 分

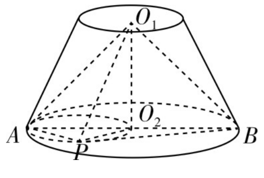
19.（Ⅰ）证明：由题意得 $O_1O_2\perp$ 平面 PAB，$\therefore O_1O_2\perp AP$，

$\because AO_2$ 为直径，$\therefore AP\perp PO_2$，$\because PO_2\cap O_1O_2=O_2$，$\therefore AP\perp$ 平面 PO_1O_2，　………4 分

$\because AP\subset$ 平面 APO_1，$\therefore$ 平面 $APO_1\perp$ 平面 PO_1O_2；　　………6 分

（Ⅱ）由题意得当 $AP=PO_2$ 时，三棱锥 O_1-APO_2 的体积最大，设点 O_2 到平面 APO_1 的距离为 d，由（Ⅰ）得 $AP\perp PO_2$，$AP\perp$ 平面 PO_1O_2，

$\because AB=2$，$\therefore AO_2=O_1O_2=1$，$AP=PO_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，



$\because V_{O_1-APO_2}=V_{O_2-APO_1}$，$\therefore \dfrac{1}{3}S_{\Delta APO_2}\cdot O_1O_2=\dfrac{1}{3}S_{\Delta APO_1}\cdot d$，

$\therefore d=\dfrac{S_{\Delta APO_2}\cdot O_1O_2}{S_{\Delta APO_1}}=\dfrac{AP\cdot PO_2\cdot O_1O_2}{AP\cdot PO_1}=\dfrac{PO_2\cdot O_1O_2}{\sqrt{PO_2{}^2+O_1O_2{}^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　　………10 分

$\therefore$ 点 B 到平面 APO_1 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　………12 分

20.（Ⅰ）由题意可知点 A 与 B 分别在直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上，　　　　　　　　………2 分

不妨设 $A(m,m)(m>0)$，则 $S_{\Delta AOB}=m^2=16$，$\therefore m=4$，$\therefore A(4,4)$，　　　　　………4 分

$\because$ 点 A 在抛物线 $y^2=2px$ 上，$\therefore p=2$，

$\therefore$ 此抛物线的方程为 $y^2=4x$，焦点 F 的坐标为 $(1,0)$；　　　　　　　　　　………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $F(1,0)$，直线 l 的方程为 $x=\dfrac{1}{2}y+1$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

由 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}y+1,\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-2y-4=0$，$\therefore y_1+y_2=2$，$\therefore y_0=1, x_0=\dfrac{3}{2}$，$\therefore M(\dfrac{3}{2},1)$，　………9 分

由题意可设椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由 $\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$.　　　………12 分

21.（Ⅰ）解：由题意得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{2}x(x>0)$，$\therefore f'(2)=\dfrac{a}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore a=1$，…2 分

$\therefore f(x)=\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+1-\ln 2(x>0)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2-x^2}{2x}$，

令 $f'(x)>0$，则 $0<x<\sqrt{2}$；令 $f'(x)<0$，则 $x>\sqrt{2}$，

$\therefore (0,\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的单调递增区间，$[\sqrt{2},+\infty)$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间；　　　………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+1-\ln 2(x>0)$，且 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递增，在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减，由题意得 $f(x_1)=f(x_2)=m$，且 $0<x_1<\sqrt{2}<x_2$，

$\therefore x_2-x_1-\dfrac{3}{2}+4m=x_2-x_1-\dfrac{3}{2}+2(f(x_2)+f(x_1))$

$=2\ln x_2+x_2-\dfrac{1}{2}{x_2}^2+2\ln x_1-x_1-\dfrac{1}{2}{x_1}^2+\dfrac{5}{2}-4\ln 2$，　　　　　　　　………6 分

令 $t_1(x)=2\ln x+x-\dfrac{1}{2}x^2$，$x>\sqrt{2}$，$\because {t_1}'(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{-x}$，

令 ${t_1}'(x)>0$，则 $\sqrt{2}<x<2$；令 ${t_1}'(x)<0$，则 $x>2$，

$\therefore t_1(x)$ 在 $(\sqrt{2},2)$ 上单调递增，在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore t_1(x)\le t_1(2)=2\ln 2$，……8 分

令 $t_2(x)=2\ln x-x-\dfrac{1}{2}x^2$，$0<x<\sqrt{2}$，$\because {t_2}'(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{-x}$，

令 ${t_2}'(x)>0$，则 $0<x<1$；令 ${t_2}'(x)<0$，则 $1<x<\sqrt{2}$，

$\therefore t_2(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $[1,\sqrt{2})$ 上单调递减，$\therefore t_2(x)\le t_2(1)=-\dfrac{3}{2}$， ………10 分

$\therefore x_2-x_1-\dfrac{3}{2}+4m\le t_1(2)+t_2(1)+\dfrac{5}{2}-4\ln 2=1-2\ln 2<0$，

$\therefore x_2-x_1<\dfrac{3}{2}-4m$. ………12 分

22. 解：（Ⅰ）将 $\begin{cases}x=2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\\ y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}$ 的参数 θ 消去得 $(x-2)^2+y^2=4$， ………3 分

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 可得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$； ………5 分

（Ⅱ）设点 B 的极坐标为 $(\rho,\alpha)(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，由题意得 $|OA|=2$，$\rho=4\cos\alpha$，

$\therefore \Delta OAB$ 的面积 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot\rho\cdot\sin\angle AOB=4\cos\alpha\,|\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})|$ ………8 分

$=2|\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{3})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\le 2+\sqrt{3}$，

当 $\alpha=-\dfrac{\pi}{12}$ 时，ΔOAB 的面积取得最大值 $2+\sqrt{3}$. ………10 分

23 解：（Ⅰ）当 $m=2$ 时，原不等式为 $|2x+1|-|2x-1|<2$，

$\therefore \begin{cases}x<-\dfrac{1}{2},\\ -(2x+1)-(1-2x)<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 2x+1-(1-2x)<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ 2x+1-(2x-1)<2,\end{cases}$ ………3 分

$\therefore x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2}$ 或 ϕ，

$\therefore$ 原不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $\{x\,|\,x<\dfrac{1}{2}\}$； ………5 分

（Ⅱ）令 $g(x)=-x^2-x-\dfrac{7}{4}$，则 $g(x)$ 是对称轴为 $x=-\dfrac{1}{2}$，且开口向下的抛物线，

$\because f(x)=\begin{cases}(m-2)x-2, x<-\dfrac{1}{2},\\ (m+2)x,-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{m},\\ (2-m)x+2, x>\dfrac{1}{m}\end{cases}$ 有最小值，$\therefore 0<m\le 2$，

$\because f(-\dfrac{1}{2})=-(\dfrac{1}{2}m+1)<f(\dfrac{1}{m})=\dfrac{2}{m}+1$，$\therefore f(x)_{\min}=f(-\dfrac{1}{2})=-(\dfrac{1}{2}m+1)$， ………8 分

$\therefore -(\dfrac{1}{2}m+1)<g(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore 1<m\le 2$，

综上，实数 m 的取值范围为 $(1,2]$. ………10 分

以上各题其他解法，请酌情赋分.