**太原市2021年高三年级模拟考试（三）**

**数学试题（理）参考答案及评分标准**

**一．选择题：** B C A D D B C A C B A B

**二．填空题：** 13. 0.6  14. $\dfrac{\pi}{2}$  15. $[2\sqrt{2},\dfrac{9}{2}]$  16. $\dfrac{1}{2}$

**三．解答题：**

17.（Ⅰ）解：在$\Delta PBC$中，由正弦定理得$\dfrac{PB}{\sin\gamma}=\dfrac{BC}{\sin(\beta-\gamma)}$， ………3 分

$\therefore PB=\dfrac{BC\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}=\dfrac{100\cdot\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ-30^\circ)}=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m； ………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$PB=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，$\because \angle APB=180^\circ-\alpha-\beta=105^\circ$，$\angle PAB=30^\circ$，

由正弦定理得$\dfrac{PB}{\sin 30^\circ}=\dfrac{AB}{\sin 105^\circ}$，$\therefore AB=\dfrac{PB\cdot\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=100(2+\sqrt{3})$， ………10 分

$\therefore DE=AB-AD-BE=100(2+\sqrt{3})-100-33\approx 240$m. ………12 分

18. 解：由题意得该市区 100 天中空气质量好，且$SO_2$的浓度不超过150的天数为$28+6+5+7=46$，

所以该市一天的空气质量好，且$SO_2$的浓度不超过150的概率估计值为 0. 46； ………4 分

（Ⅱ）由题意可得$2\times 2$列联表如下：

| 空气质量等级 \ $SO_2$的浓度 | $[0,150]$ | $(150,475]$ |
|---|---|---|
| 空气质量好 | 46 | 10 |
| 空气质量不好 | 24 | 20 |

………8 分

（Ⅲ）假设该市一天的空气质量与当天$SO_2$的浓度没有关系， ………9 分

则$k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(46\times 20-10\times 24)^2}{56\times 44\times 70\times 30}\approx 8.936>6.635$，

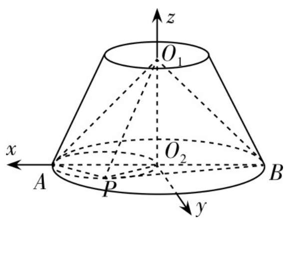
所以有99%的把握认为该市一天的空气质量与当天$SO_2$的浓度有关. ………12 分

19.（Ⅰ）证明：由题意得$O_1O_2\perp$平面$PAB$，$\therefore O_1O_2\perp AP$，

$\because AO_2$为直径，$\therefore AP\perp PO_2$，$\because PO_2\cap O_1O_2=O_2$，$\therefore AP\perp$平面$PO_1O_2$， ………4 分

$\because AP\subset$平面$APO_1$，$\therefore$平面$APO_1\perp$平面$PO_1O_2$； ………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$O_1O_2\perp$平面$PAB$，以$O_2$为坐标原点，向量$\overrightarrow{O_2A},\overrightarrow{O_2O_1}$的方向为$x$轴，$z$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$O_2-xyz$，由题意得$O_2(0,0,0)$，$O_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$B(-2,0,0)$，$P(1,1,0)$或$P(1,-1,0)$，由对称性，不妨取$P(1,1,0)$，




设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$是平面$APO_1$的一个法向量，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PO_1}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_1-y_1=0,\\ x_1+y_1-2z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$，则$\begin{cases}x_1=1,\\ z_1=1,\end{cases}$ $\therefore\vec{m}=(1,1,1)$， ………8 分

设$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$是平面$BPO_1$的一个法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PO_1}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}3x_2+y_2=0,\\ x_2+y_2-2z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=-3$，则$\begin{cases}x_2=1,\\ z_2=-1,\end{cases}$ $\therefore\vec{n}=(1,-3,-1)$， ……10 分

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}=-\dfrac{\sqrt{33}}{11}$，

$\therefore$二面角$A-PO_1-B$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. ………12 分

20（Ⅰ）由题意可知点$A$与$B$分别在直线$y=x$和$y=-x$上， ………2 分

不妨设$A(m,m)(m>0)$，则$S_{\Delta AOB}=m^2=16$，$\therefore m=4$，$\therefore A(4,4)$，

$\because$点$A$在抛物线$y^2=2px$上，$\therefore p=2$， ………4 分

$\therefore$此抛物线的方程为$y^2=4x$，焦点的$F$坐标为$(1,0)$； ………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$F(1,0)$，直线$l$的方程为$x=\dfrac{1}{2}y+1$，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}y+1,\\ y^2=4x\end{cases}$得$y^2-2y-4=0$，$\therefore y_1+y_2=2$，$\therefore y_0=1,x_0=\dfrac{3}{2}$，$\therefore M(\dfrac{3}{2},1)$， ………9 分

由题意可设椭圆$C$的标准方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$， ………10 分

$\therefore\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$，$\therefore 4b^2+9a^2=4a^2b^2$，$\therefore 4b^2=(4b^2-9)a^2$，

$\because a>b>0$，$\begin{cases}4b^2-9>0,\\ 4b^2>(4b^2-9)b^2,\end{cases}$ $\therefore\dfrac{3}{2}<b<\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

$\therefore$椭圆$C$短轴长的取值范围是$(3,\sqrt{13})$. ………12 分

21.（Ⅰ）解：由题意得$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{2}x(x>0)$，$\because f'(2)=\dfrac{a}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore a=1$，……2 分

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2-x^2}{2x}$，令$f'(x)>0$，则$0<x<\sqrt{2}$；令$f'(x)<0$，则$x>\sqrt{2}$，

$\therefore(0,\sqrt{2})$是$f(x)$的单调递增区间，$[\sqrt{2},+\infty)$是$f(x)$的单调递减区间； ………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+b-\ln 2$，

$\because f(2)=\ln 2-1+b-\ln 2=b-1=0$，$\therefore b=1$， ………5 分

$\therefore f(x)=\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+1-\ln 2(x>0)$，且$f(x)$在$(0,\sqrt{2})$上单调递增，在$[\sqrt{2},+\infty)$上单调递减，

由题意得 $f(x_1)=f(x_2)=m$，且 $0<x_1<\sqrt{2}<x_2$，

$\therefore x_2-x_1-\frac{3}{2}+4m=x_2-x_1-\frac{3}{2}+2(f(x_2)+f(x_1))$

$=2\ln x_2+x_2-\frac{1}{2}x_2^{\ 2}+2\ln x_1-x_1-\frac{1}{2}x_1^{\ 2}+\frac{5}{2}-4\ln 2$， ………7 分

令 $t_1(x)=2\ln x+x-\frac{1}{2}x^2$，$x>\sqrt{2}$，$\because t_1^{\prime}(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{-x}$，

令 $t_1^{\prime}(x)>0$，则 $\sqrt{2}<x<2$；令 $t_1^{\prime}(x)<0$，则 $x>2$，

$\therefore t_1(x)$ 在 $(\sqrt{2},2]$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore t_1(x)\le t_1(2)=2\ln 2$， ……9 分

令 $t_2(x)=2\ln x-x-\frac{1}{2}x^2$，$0<x<\sqrt{2}$，$\because t_2^{\prime}(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{-x}$，

令 $t_2^{\prime}(x)>0$，则 $0<x<1$；令 $t_2^{\prime}(x)<0$，则 $1<x<\sqrt{2}$，

$\therefore t_2(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $[1,\sqrt{2})$ 上单调递减，$\therefore t_2(x)\le t_2(1)=-\frac{3}{2}$， ………11 分

$\therefore x_2-x_1-\frac{3}{2}+4m\le t_1(2)+t_2(1)+\frac{5}{2}-4\ln 2=1-2\ln 2<0$，

$\therefore x_2-x_1<\frac{3}{2}-4m.$ ………12 分

22. 解：（Ⅰ）将 $\begin{cases}x=2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\\ y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}$ 的参数 $\theta$ 消去得 $(x-2)^2+y^2=4$， ………3 分

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 可得曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$； ………5 分

（Ⅱ）设点 $B$ 的极坐标为 $(\rho,\alpha)(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$，由题意得 $|OA|=2$，$\rho=4\cos\alpha$，

$\therefore \Delta OAB$ 的面积 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot\rho\cdot\sin\angle AOB=4\cos\alpha\,|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})|$ ………8 分

$=2|\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}|\le 2+\sqrt{3}$，

当 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$ 时，$\Delta OAB$ 的面积取得最大值 $2+\sqrt{3}$. ………10 分

23 解：（Ⅰ）当 $m=2$ 时，原不等式为 $|2x+1|-|2x-1|<2$，

$\therefore \begin{cases}x<-\frac{1}{2},\\ -(2x+1)-(1-2x)<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},\\ 2x+1-(1-2x)<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\ 2x+1-(2x-1)<2,\end{cases}$ ……3 分

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$ 或 $\phi$，

$\therefore$ 原不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $\{x\,|\,x<\frac{1}{2}\}$； ………5 分

（Ⅱ）令 $g(x)=-x^2-x-\frac{7}{4}$，则 $g(x)$ 是对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，且开口向下的抛物线，

$\because f(x)=\begin{cases}(m-2)x-2, x<-\frac{1}{2},\\(m+2)x,-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{m},\\(2-m)x+2, x>\frac{1}{m}\end{cases}$ 有最小值，$\therefore 0<m\le 2$，

$\because f(-\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2}m+1)<f(\frac{1}{m})=\frac{2}{m}+1$，$\therefore f(x)_{\min}=f(-\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2}m+1)$， ………8 分

$\therefore -(\frac{1}{2}m+1)<g(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$，$\therefore 1<m\le 2$，

综上，实数 $m$ 的取值范围为 $(1,2]$． ………10 分

**以上各题其他解法，请酌情赋分.**