太原市 2021 年高三年级模拟考试（三）

数学试卷（理科）

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.已知复数 z 满足 $i\cdot z=-1+i$，则在复平面内与复数 z 对应的点的坐标为　（　　）

A. $(1,-1)$　　B. $(1,1)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-1,-1)$

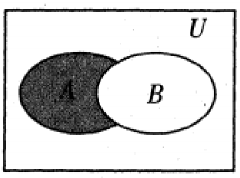
【答案】B

【解析】$\because z=\dfrac{-1+i}{i}=1+i,\therefore$ 复数 z 对应的点的坐标为 $(1,1)$

【考点】复数的几何意义

2.已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x(x-2)<0\},B=\{x||x|\le 1\}$，则下图阴影部分表示的集合是　（　　）

A. $[-1,0)$　　B. $[-1,0)\cup[1,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $(0,1)$



【答案】C

【解析】图中阴影部分表示的集合为 $C_A(A\cap B)$，$A=\{x|0<x<2\},B=\{x|-1\le x\le 1\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|0<x\le 1\},\therefore C_A(A\cap B)=(1,2)$.

【考点】集合的 Venn 图

3. 2020 年初，新型冠状病毒 $(COVID-19)$ 引起的肺炎疫情爆发以来，各地医疗机构采取了各针对性的治疗方法，取得了不错的成效，某医疗机构开始使用中西医结合方法后，每周治愈的患者人数如下表所示：

第 x 周	1	2	3	4	5
治愈人数 y （单位：十人）	3	8	10	14	15

由上表可得 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=bx+1,$ 则此回归模型第 5 周的残差（实际值减区预报值）为 （ ）

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】A

【解析】$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3, \bar{y}=\frac{3+8+10+14+15}{5}=10.$ 则中心坐标为 $(3,10).$ 将 $(3,10)$ 代入 $y=bx+1$ 得 $b=3.$ 则线性回归方程为 $y=3x+1$，取 $x=5,$ 可得 $y=16.$ 则此回归模型的第 5 周残差为 $15-16=-1.$

【考点】回归直线方程

4.已知 α,β 是两个不同的平面， m,n 是两条不同的直线，则下列正确的结论是 （ ）

A.若 $m\parallel n, m\parallel\alpha, n\parallel\beta,$ 则 $\alpha\parallel\beta$

B.若 $\alpha\parallel\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta,$ 则 $m\parallel n$

C.若 $m\perp n, m\perp\alpha, n\parallel\beta,$ 则 $\alpha\perp\beta$

D.若 $m\perp n, m\perp\alpha, n\perp\beta,$ 则 $\alpha\perp\beta$

【答案】D

【解析】若 $m\parallel n, m\parallel\alpha, n\parallel\beta,$ 则 $\alpha\parallel\beta$ 或 α 与 β 相交，则 A 错误；

若 $\alpha\parallel\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta,$ 则 $m\parallel n$ 或 m 与 n 异面，则 B 错误；

若 $m\perp n, m\perp\alpha, n\parallel\beta,$ 则 $\alpha\parallel\beta$ 或 α 与 β 相交，则 C 错误；

若 $m\perp n, m\perp\alpha, n\perp\beta,$ 则 $\alpha\perp\beta,$ 则 D 正确．

【考点】立体几何中平行，垂直的判定定理及性质定理

5.古代中国的太极八卦图是以圆内的圆心为界，画出相同的两个阴阳鱼，阳鱼的头部有阴眼，阴鱼的头部有阳眼，表示万物都在相互转化，互相渗透，阴中有阳，阳中有阴，阴阳相合，相生相克，蕴含现代哲学中的矛盾对立统一规律。图 2 （正八边形 $ABCDEFGH$ ）是由图 1 （八卦模型图）抽象而得到，并建立如图 2 的平面直角坐标系，设 $OA=1.$ 则下列错误的结论是

（　　）

A. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B.以射线 OF 为终边的角的集合可表示为 $\left\{\alpha\left|\alpha=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in Z\right.\right\}$

C.在以点 O 为圆心、OA 为半径的圆中，弦 AB 所对是劣弧弧长为 $\dfrac{\pi}{4}$

D.正八边形 $ABCDEFGH$ 的面积为 $4\sqrt{2}$

图1

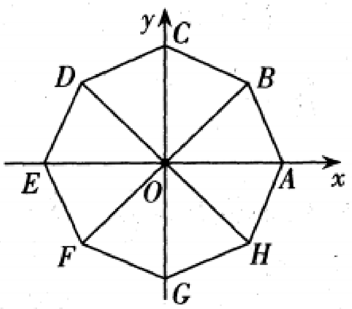


图2

【答案】D

【解析】由题可知，正八边形的八个内角相等，则每个内角都是 $\dfrac{1}{8}\times2\pi=\dfrac{\pi}{4}$.

$\because\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\cdots=\left|\overrightarrow{OH}\right|=1,\angle AOD=3\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OD}\right|\cdot\cos\angle AOD=1\times1\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\therefore A$ 正确，

$\because\angle AOF=5\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$，则以射线 OF 为终边的角的集合可表示为 $\left\{\alpha\left|\alpha=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in Z\right.\right\}$， $\therefore B$ 正确，

弧长 $AB=\dfrac{\pi}{4}\times1=\dfrac{\pi}{4},\therefore C$ 正确， $S_{正八边形}=8\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.\therefore D$ 错误

【考点】向量的数量积，终边相同的角的表示，扇形的弧长公式，三角形的面积公式等综合

6.已知实数 a,b 满足 $3\times2^{a}-2^{b+1}=0,a=c+\log_2(x^2-2x+3)$，则下列正确的结论是　（　　）

$A.a>b>c$　　　　$B.b>a>c$　　　　$C.a>c>b$　　　　$D.c>b>a$

【答案】B

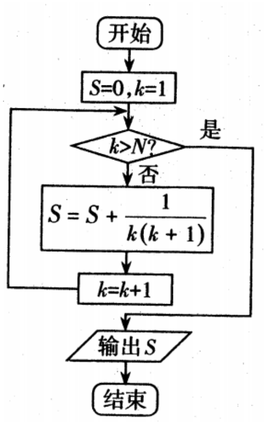
【解析】$\because3\times2^{a}-2^{b+1}=0\therefore3\times2^{a}=2\times2^{b}\therefore2^{a}<2^{b}\therefore b>a$，

$\because a=c+\log_2(x^2-2x+3)=c+\log_2[(x-1)^2+2)]$，$\log_2[(x-1)^2+2)]\geq1\therefore a-c=\log_2[(x-1)^2+2)]\geq1\therefore a>c$，$\therefore$ 选 B.

【考点】利用函数单调性比较大小

7.某程序框图如右图所示，若 $N=2021$，则输出的 $S=$ （　　）

A.$\dfrac{2019}{2020}$　　B.$\dfrac{2020}{2021}$　　C.$\dfrac{2021}{2022}$　　D.$\dfrac{2022}{2023}$



【答案】C

【解析】$S=0,k=1,N=2021,k>N$？ 否，　$S=\dfrac{1}{2},k=2,N=2021,k>N$？ 否，

$S=\dfrac{2}{3},k=3,N=2021,k>N$？ 否，　$S=\dfrac{3}{4},k=4,N=2021,k>N$？ 否，

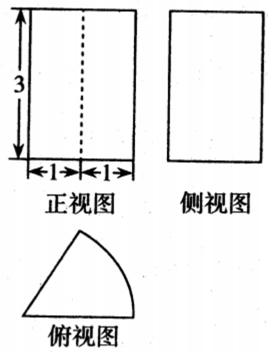
.... $S=\dfrac{2020}{2021},k=2021,N=2021,k>N$？ 否，　$S=\dfrac{2021}{2022},k=2022,N=2021,k>N$？ 是，

输出 $S=\dfrac{2021}{2022}$

【考点】程序框图

8.已知某几何体的三视图如图所示，其中俯视图是扇形，则该几何体的侧面面积为 （　　）

A.$12+2\pi$　　B.2π　　C.$12+\pi$　　D.π



【答案】A

【解析】由三视图以及题意可知，该几何体是一个 $\dfrac{1}{6}$ 圆柱。底面半径为 2，高为 3，所以这个

几何体的侧面积为 $S_{侧}=2\times3+2\times3+2\pi\cdot2\times\frac{60}{360}\times3=12+2\pi$，答案选择：$A$

【考点】三视图，几何体的侧面积

9.已知锐角 α,β 满足 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$ 的最小值为　　(　　)

$A.4$　　　　$B.4\sqrt{3}$　　　　$C.8$　　　　$D.8\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because\alpha-\beta=\frac{\pi}{3},\therefore\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

令 $x=\cos\alpha\cos\beta,y=\sin\alpha\sin\beta$，则 $x+y=\frac{1}{2}$，　$\because\alpha,\beta$ 为锐角，　$\therefore x>0,y>0$

$$\therefore\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\times2\times(x+y)=2(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y})\geq2(2+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}})=8$$

当且仅当 $x=y$ 即 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$ 即 $\cos(\alpha+\beta)=0$ 即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时 $\because\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$ $\therefore\alpha=\frac{5\pi}{12},\beta=\frac{\pi}{12}$ 时取等号

【考点】余弦函数的差角公式，基本不等式

10.已知三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，三棱锥 A_1-ABC 的体积为 8，则四面体 $A-B_1CC_1$ 的体积为　　(　　)

$A.3\sqrt{3}$　　　　$B.4\sqrt{2}$　　　　$C.4\sqrt{3}$　　　　$D.4\sqrt{7}$

【答案】 B

【解析】设 $\Delta ABC,\Delta A_1B_1C_1$ 面积分别为 S_1,S_2，棱台高为 h，则 $V_{A-ABC}=\frac{1}{3}S_1h=8$，$V_{A-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_2h=4$，

两式相乘得 $\frac{1}{9}S_1S_2h^2=32$，　$\therefore\frac{1}{3}\sqrt{S_1S_2}h=4\sqrt{2}$，　$\therefore V_{台}=\frac{1}{3}(S+S^{'}+\sqrt{S\cdot S^{'}})h=4+8+4\sqrt{2}=12+4\sqrt{2}$

$\because V_{台}=V_{A-A_1B_1C_1}+V_{B_1-ABC}+V_{A-B_1CC_1}=4+8+V_{A-B_1CC_1}$，$V_{A-B_1CC_1}=4\sqrt{2}$

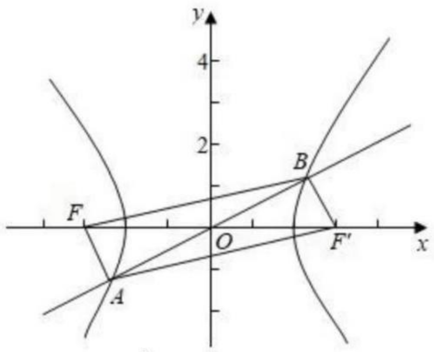
【考点】台体的体积公式，三棱锥的体积公式

11.已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点，过原点的直线 l 与该双曲线的左右两支分别相交于点 A、B，则 $\frac{1}{|FA|}-\frac{9}{|FB|}$ 的取值范围是　　(　　)

A. $[-1,0)$　　　　B. $\left[-\frac{4}{5},0\right)$　　　　C. $\left[-\sqrt{2},1\right)$　　　　D. $[-1,+\infty)$

【答案】 A

【解析】解析：设 $|AF|=m$，$|BF|=n$，双曲线的右焦点为 F'，连接 BF'，AF'，由对称性可得四边形 $AFBF'$ 为平行四边形，则 $|BF'|=|AF|=m$，$n-m=2a=4$，$n=m+4$，且 $m\ge c-a=1$，则 $\frac{1}{|FA|}-\frac{9}{|FB|}=\frac{1}{m}-\frac{9}{4+m}$，设 $f(m)=\frac{1}{m}-\frac{9}{4+m}$，$m\ge 1$，则 $f'(m)=-\frac{1}{m^2}+\frac{9}{(4+m^2)}=\frac{8(m-2)(m+1)}{m^2(4+m^2)}$，当 $m>2$ 时，$f'(m)>0$，$f(m)$单调递增，当 $1\le m<2$ 时，$f'(m)<0$，$f(m)$单调递减，可得在 $m=2$ 处取得极小值，且 $f(2)=-1$ 为最小值，当 $m=1$ 时，$f(m)=-\frac{4}{5}$，当 $m\to\infty$ 时，$f(m)\to 0$，则 $f(m)\in[-1,0)$，故选 A。



【考点】本题考查双曲线的几何性质与定义，利用导数研究函数的单调性与最值。

12.在 ΔABC 中，$\sin(A-B)+\sin B=\sin C$，点 D 在边 BC 上，且 $CD=2BD$，设 $k=\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle BAD}$，则当 k 取最大值时，$\sin\angle ACD=$　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$　　D. $\frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{11}}{6}$

【答案】B

【解析】在 ΔABC 中，$\sin C=\sin(A+B)$，即 $\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$，得 $\sin B=2\cos A\sin B$，因为 $0<B<\pi$，$\sin B\ne 0$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，且 $A=\frac{\pi}{3}$，由题意可知，$k=\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{BD}=\frac{3AD}{BC}$，令 $AC=b$，$AB=c$，$BC=a$，则 $AD=\frac{ak}{3}$，$\because \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}a^2k^2=\frac{4}{9}c^2+\frac{1}{9}b^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$，即 $a^2k^2=4c^2+b^2+2bc$，在 ΔABC 中，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-bc$，则 $k^2=\frac{\frac{4c}{b}+\frac{b}{c}+2}{\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-1}$，令 $t=\frac{c}{b}$，则 $k^2=f(t)=\frac{4t+\frac{1}{t}+2}{t+\frac{1}{t}-1}=\frac{4t^2+2t+1}{t^2-t+1}$，

$f'(t)=\frac{-6t^2+6t+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$，令 $f'(\mathrm{t})=0$，$\mathrm{t}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，即 $\frac{\mathrm{c}}{b}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$结合余弦定理可得 $b=\left(\sqrt{3}-1\right)c$，

$a=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\mathrm{c}$，在 ΔABC 中，由正弦定理可得 $\because\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore\sin\mathrm{C}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，即 $\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。

【考点】本题考查解三角形，利用导数研究函数的单调性与最值。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.先采用随机模拟的方法估计某运动员射击击中目标的概率，先由计算机给出 0 到 9 之间取整数的随机数，规定 $0,1,2$ 表示没有击中目标 $3,4,5,6,7,8,9$，表示击中目标，以 4 个随机数为一组，代表射击 4 次的结果，经随机模拟先生了 20 组随机数：

6011 3661 9597 6947 1417 4698 0371 6233 2616 8045

7424 7610 4281 7527 0293 7140 9857 0347 4373 8636

根据以上数据估计该运动员射击 4 次至少击中 3 次目标的概率为_______.

【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】一共 20 组随机数，其中，射击 4 次至少击中 3 次目标有 12 组随机数，根据古典概型的计算公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 计算概率 $P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

【考点】古典概型

14. $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)dx=$_________.

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】$\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}xdx$，

$\because\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 中的被积函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 恰是一个位于 x 轴上方的半圆，其面积为 $\frac{\pi}{2}$，故 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$，

$\because\int_{-1}^{1}xdx=0$，$\therefore\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)dx=\frac{\pi}{2}$

【考点】定积分的几何意义

15.已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x+y-5\geq 0\\ x+2y-7\leq 0\\ x-y-1\leq 0\end{cases}$，则 $\frac{y^2+2x^2}{xy}$ 的取值范围是_________.

【答案】$[2\sqrt{2},\frac{9}{2}]$

【解析】$\frac{y^2+2x^2}{xy}=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}$，令 $\frac{y}{x}=t$，则原式 $=t+\frac{2}{t}$，由可行域以及目标函数 $\frac{y}{x}$ 可知，$t\in[\frac{1}{2},3]$，利用对号函数性质可得 $t+\frac{2}{t}\in[2\sqrt{2},\frac{9}{2}]$

【考点】线性规划问题，对勾函数

16.已知函数 $f(x)=x^2-2mx+e^{2x}-2me^x+2m^2$，若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)\le\frac{1}{2}$ 成立，则实数 $m=$____.

【答案】$\frac{1}{2}$

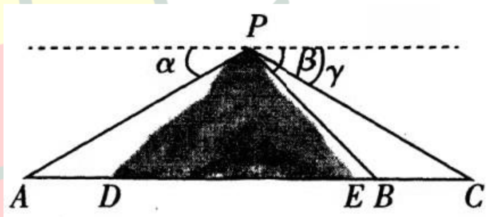
【解析】$f(x)=x^2-2mx+e^{2x}-2me^x+2m^2=(x-m)^2+(e^x-m)^2$，则存在 $f(x_0)\le\frac{1}{2}$ 即等价于存在点 (x_0,e^{x_0}) 到点 (m,m) 的距离的平方和小于等于 $\frac{1}{2}$，等价于曲线 $y=e^x$ 上的点到 $y=x$ 上点的距离的平方的最小值小于等于 $\frac{1}{2}$，$y'=e^x=1,x=0$，即 $y=e^x$ 上点 $(0,1)$ 满足题意，$(0-m)^2+(1-m)^2=\frac{1}{2}$，得 $m=\frac{1}{2}$

【考点】导数中的距离问题

三、解答题（共 70 分，解答题写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答）

（一）必考题：共 60 分

17.（本小题满分 12 分）如图，A,B,C 为山脚两侧共线的三点，在山顶 P 处测得这三点的俯角分别为 $\alpha=30^\circ$，$\beta=45^\circ$，$\gamma=30^\circ$，现计划沿直线 AC 开通一条穿山隧道 DE，经测量 $AD=100m$，$BE=33m$，$BC=100m$.



（1）求 PB 的长；

（2）求隧道 DE 的长（精确到 1m）

附：$\sqrt{2}=1.414$；$\sqrt{3}=1.732$.

【答案】（1）$\therefore PB=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})m$；（2）$\therefore DE\approx240m$.

【解析】（1）在 ΔPBC 中，由正弦定理得 $\frac{PB}{\sin\gamma}=\frac{BC}{\sin(\beta-\gamma)}$，

$\therefore PB=\frac{BC\cdot\sin\lambda}{\sin(\beta-\gamma)}=\frac{100\cdot\sin 30^{\circ}}{\sin(45^{\circ}-30^{\circ})}=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})m$；

（2）由（1）得 $PB=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$， $\because\angle APB=180^{\circ}-\alpha-\beta=105^{\circ},\angle PAB=30^{\circ}$ ，

由正弦定理得 $\frac{PB}{\sin 30^{\circ}}=\frac{AB}{\sin 105^{\circ}}$ ， $\therefore AB=100(2+\sqrt{3})$ ， $\therefore DE=AB-AD-BE\approx 240m$ 。

【考点】正弦定理解三角形

18.（本小题满分 12 分）

为进一步保护环境，加强治理空气污染，某市环保监测部门对市区空气质量进行调研，随机抽查了市区 100 天的空气质量等级与当天空气中 SO_2 的浓度（单位: g/m ），整理数据得到下表：

空气质量等级 / SO_2 的浓度	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
1（优）	28	6	2
2（良）	5	7	8
3（轻度污染）	3	8	9
4（中度污染）	1	12	11

若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天"空气质量好";若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”，根据上述数据，回答以下问题.

（Ⅰ）估计事件"该市一天的空气质量好，且 SO_2 的浓度不超过 150 "的概率;

空气质量 / SO_2 的浓度	$[0,150]$	$(150,475]$
空气质量好		
空气质量不好		

（Ⅱ）完成下面的 2×2 列联表，

（Ⅲ）根据（Ⅱ）中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度有关?

附： $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

【答案】见解析

【解析】（Ⅰ）该市一天的空气质量好，且 SO_2 的浓度不超过 150 的天数一共为： $28+7+5+6=46$ 天，所以估计事件"该市一天的空气质量好，且 SO_2 的浓度不超过 150 "的概率为： $\dfrac{46}{100}=\dfrac{23}{50}$.

（Ⅱ）补全表格应为：

空气质量 / SO_2 的浓度	$[0,150]$	$(150,475]$
空气质量好	46	10
空气质量不好	24	20

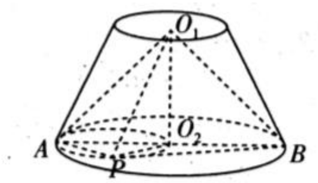
（Ⅲ）由表格可得： $a=46$ ， $b=10$ ， $c=24$ ， $d=20$ ， $n=100$ ，

所以 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100(46\times 20-10\times 24)^2}{56\times 44\times 70\times 30}\approx 8.936$ ， $8.936>6.635$ ，所以有 99% 的把握认为该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度有关。

【考点】事件的概率，独立性检验

19. （本小题满分 12 分） 如图， O_1,O_2 分别是圆台上下底面的圆心， AB 是下底面圆的直径，$AB=2O_1O_2$，点 P 是下底面内以 AO_2 为直径的圆上的一个动点（点 P 不在 AO_2 上）

（1）求证：平面 $APO_1\perp PO_1O_2$；



（2）若 $O_1O_2=2,\angle PAB=45^{\circ}$，求二面角 $A-PO_1-B$ 的余弦值.

【答案】（1）见解析；（2）见解析.

【解析】（1）因为 O_1,O_2 是垂直于底面的，则 $O_2P\perp O_1O_2$，又因为点 P 是下底面内以 AO_2 为直径的圆上的一个动点，所以 $AP\perp PO_2$，又因为 $O_1O_2\cap O_2P$，且 $O_1O_2,O_2P\subset$ 平面 PO_1O_2， $AP\not\subset$ 平面 PO_1O_2，所以 $AP\perp$ 平面PO_1O_2，又因为 $AP\subset$ 平面 APO_1，所以平面 $APO_1\perp PO_1O_2$；

（2）以 O_2 为原点，以 O_2D,O_2B,O_2O_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，$A=(0,-2,0),B=(0,2,0),O_1=(0,0,2),P(1,1,0)$，设平面 APO_1 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\overrightarrow{AP}=(1,3,0),\overrightarrow{AO_1}=(0,2,2),\overrightarrow{PO_1}=(-1,-1,2)$

$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AO_1}=0\end{cases}$，所以 $\vec{n}=(-3,1,-1)$ 同理，平面 PO_1O_2 的法向量为 $\vec{m}=(1,1,1)$ 所以 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{33}}{11}$，所以二面角 $A-PO_1-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

【考点】空间向量在立体几何中的应用

20.(本小题满分 12 分）已知面积为 16 的等腰直角三角形 ΔAOB（O 为坐标原点）内接于抛物线 $y^2=2px(p>0)$，$OA\perp OB$，过抛物线的焦点 F 且斜率为 2 的直线 l 与该抛物线交于 P,Q 两点，点 M 是 PQ 的中点.

（1）求此抛物线的方程和焦点 F 的坐标；

（2）若焦点在 y 轴上的椭圆 C 经过点 M，求椭圆 C 短轴长的取值范围.

【答案】（1）见解析；（2）见解析.

【解析】（1）由题意可知 A 与 B 分别在直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上，设 $A(m,m)(m>0)$，则 $S_{\Delta AOB}=m^2=16,\therefore m=4,\therefore A(4,4)$，点 A 在抛物线上，得 $p=2$

可得抛物线方程为 $y^2=4x$，焦点 F 坐标为 $(1,0)$；

（2）由（1）得 F $(1,0)$，直线 l 的方程为 $x=\frac{1}{2}y+1$，设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$

由 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}y+1\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-2y-4=0$，得 $y_1+y_2=2$，得 $y_0=1,x_0=\frac{3}{2},\therefore M(\frac{3}{2},1)$

由题意可设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\therefore 4b^2+9a^2=4a^2b^2,\therefore 4b^2=(4b^2-9)a^2$，

$\because a>b>0,\begin{cases}4b^2-9>0\\4b^2>(4b^2-9)b^2\end{cases},\therefore \frac{3}{2}<b<\frac{\sqrt{13}}{2}$，

所以椭圆短轴长的取值范围是 $(3,\sqrt{13})$.

【考点】抛物线的标准方程，椭圆的性质

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=a\ln x-\frac{1}{4}x^2+b-\ln 2$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）设 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ 是函数 $g(x)=f(x)-m$ 的两个零点，求证 $x_2-x_1<\frac{3}{2}-4m$.

【答案】（I）见解析；（II）见解析.

【解析】（I）$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2}x(x>0)$，$f'(2)=\frac{a}{2}-1=-\frac{1}{2}$，$\therefore a=1$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x=\frac{2-x^2}{2x}$，令 $f'(x)>0$，则 $x>\sqrt{2}$，

$\therefore\left(0,\sqrt{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的单调递增区间，$\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间；

（II）由（I）得 $f(x)=\ln x-\frac{1}{4}x^2+b-\ln 2$，$\because f(2)=\ln 2-1+b-\ln 2=b-1=0,\therefore b=1$，

$\therefore f(x)=\ln x-\frac{1}{4}x^2+1-\ln 2(x>0)$，且 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ 上单调递减，由题意得 $f(x_1)=f(x_2)=m$，且 $0<x_1<\sqrt{2}<x_2$，

$\therefore x_2-x_1-\frac{3}{2}+4m=x_2-x_1+2\left(f(x_2)+f(x_1)\right)=2\ln x_2+x_2-\frac{1}{2}x_2^2+2\ln x_1-x_1-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{5}{2}-4\ln 2$

令 $t_1(x)=2\ln x+x-\frac{1}{2}x^2$，$x>\sqrt{2}$，$\because t_1'(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{-x}$，

令 $\because t_1'(x)>0$，则 $\sqrt{2}<x<2$；令 $\because t_1'(x)<0$，则 $x>2$，

$\therefore t_1(x)$ 在 $\left(\sqrt{2},2\right]$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore t_1(x)\le t_1(2)=2\ln 2$，

令 $t_2(x)=2\ln x-x-\frac{1}{2}x^2$，$0<x<\sqrt{2}$，$\because t_2'(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{-x}$，

令 $\because t_2'(x)>0$，则 $0<x<1$；令 $\because t_2'(x)<0$，则 $1<x<\sqrt{2}$，

$\therefore t_2(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $\left[1,\sqrt{2}\right)$ 上单调递减，$\therefore t_2(x)\le t_2(1)=-\frac{3}{2}$，

$\therefore x_2-x_1-\frac{3}{2}+4m\le t_1(2)+t_2(1)+\frac{5}{2}-4\ln 2=1-2\ln 2<0$，$\therefore x_2-x_1<\frac{3}{2}-4m$.

【考点】导数的切线问题，导数研究函数的单调性，零点问题转化

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.(本小题满分 10 分)**【选修 4−4:坐标系与参数方程】**

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\\ y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），以坐标原点 O 为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（I）求曲线 C 的极坐标方程；

（II）设点 A 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{3})$，点 B（异于点 O 和点 A）在曲线 C 上，求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

【答案】（I）$\rho=4\cos\theta$；（II）$2+\sqrt{3}$.

【解析】（I）将 $\begin{cases}x=2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\\ y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}$ 的参数 θ 消去得 $(x-2)^2+y^2=4$，

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，可得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$；

（II）设点 B 的坐标为 $(\rho,\alpha)(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$，由题意得 $|OA|=2,\rho=4\cos\theta$，

$\therefore \triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA|\bullet\rho\bullet\sin\angle AOB=4\cos\theta\left|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})\right|=2\left|\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\le 2+\sqrt{3}$,

当 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$ 时，$\triangle OAB$ 的面积最大值 $2+\sqrt{3}$.

【考点】参数方程与普通方程的互化，直角坐标方程与极坐标方程的互化，化归与转化思想

23.(本小题满分 10 分)【**选修 4−5:不等式选讲**】

已知函数 $f(x)=|2x+1|-|mx-1|(m>0)$.

(Ⅰ)当 $m=2$ 时，解不等式 $f(x)<2$；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 有最小值，且关于 x 的方程 $f(x)=-x^2-x-\frac{7}{4}$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

【答案】(Ⅰ) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$；(Ⅱ) $m\in\left(2\sqrt{7}-3,+\infty\right)$.

【解析】(Ⅰ) $f(x)=|2x+1|-|2x-1|=\begin{cases}-(2x+1)+(2x-1)=-2,x\le-\frac{1}{2}\\(2x+1)+(2x-1)=4x,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\(2x+1)-(2x-1)=2,x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$，则当 $f(x)<2$ 时，

当 $x\le-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-2<2$ 恒成立；

当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=4x<2$，则 $x<\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；

当 $x\ge\frac{1}{2}$ 时，$f(x)<2$ 无解；综上所述，$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

(Ⅱ)令 $g(x)=-x^2-x-\frac{7}{4}$，则 $g(x)$ 是对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，且开口向下的抛物线，

$$\because f(x)=\begin{cases}(m-2)x-2,x<-\frac{1}{2},\\(m+2)x,-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{m},\text{有最小值},\therefore 0<m<2,\\(2-m)x+2,x>\frac{1}{m}\end{cases}$$

$$\because f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}m+1\right)<f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{2}{m}+1,\quad \therefore f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}m+1\right),$$

$$\therefore-\left(\frac{1}{2}m+1\right)<g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2},\therefore 1<m\le 2,$$

综上，实数 m 的取值范围为 $(1,2]$.

【考点】不等式的求解